GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

1

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Conjuntos
Funções

568 exercícios propostos com resposta

361 questões de vestibulares com resposta

9ª edição | São Paulo – 2013

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2013.
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268
SAC: 0800-0117875
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami. — 9. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1680-1 (aluno)
ISBN 978-85-357-1681-8 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) – Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) – Testes I. Murakami, Carlos II. Título III: Conjuntos, funções.

12-12850 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 1

Gerente editorial: Lauri Cericato
Editor: José Luiz Carvalho da Cruz
Editores-assistentes: Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar
Auxiliares de serviços editoriais: Daniella Haidar Pacifico/Margarete Aparecida de Lima/Rafael Rabaçallo Ramos/Vanderlei Aparecido Orso
Digitação e cotejo de originais: Guilherme Reghin Gaspar/Elillyane Kaori Kamimura
Pesquisa iconográfica: Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes
Revisão: Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Eduardo Sigristi/Luciana Azevedo/Maura Loria
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: Antonio Roberto Bressan
Projeto gráfico: Carlos Magno
Capa: Homem de Melo & Tróia Design
Imagem de capa: Buena Vista Images/Getty Images
Ilustrações: Conceitograf/Mario Yoshida
Diagramação: TPG
Assessoria de arte: Maria Paula Santo Siqueira
Encarregada de produção e arte: Grace Alves
Coordenadora de editoração eletrônica: Silvia Regina E. Almeida

Produção gráfica: Robson Cacau Alves
Impressão e Acabamento: Prol Editora Gráfica

729.170.009.001

Apresentação

Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção elaborada com o objetivo de oferecer ao estudante uma visão global da Matemática, no ensino médio. Desenvolvendo os programas em geral adotados nas escolas, a coleção dirige-se aos vestibulandos, aos universitários que necessitam rever a Matemática elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de ensino médio cujo interesse se focaliza em adquirir uma formação mais consistente na área de Matemática.

No desenvolvimento dos capítulos dos livros de *Fundamentos* procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática elementar, as proposições e os teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, levando o estudante a uma revisão. A sequência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final de cada volume, o aluno pode encontrar as respostas para os problemas propostos e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por questões de vestibulares, selecionadas dos melhores vestibulares do país e com respostas. Essas questões podem ser usadas para uma revisão da matéria estudada.

Aproveitamos a oportunidade para agradecer ao professor dr. Hygino H. Domingues, autor dos textos de história da Matemática que contribuem muito para o enriquecimento da obra.

Neste volume, abordamos a introdução ao conceito de função e os estudos das funções polinomiais de 1º e 2º graus. Os capítulos iniciais (I a IV) são preparatórios para o aprendizado da Matemática no ensino médio, mas não devem tomar um tempo excessivo. O capítulo final é muito importante para a continuação do estudo de função inversa. Pode-se aproveitar o desenvolvimento de cada capítulo para revisar cálculo algébrico, principalmente em equações e inequações.

Finalmente, como há sempre uma certa distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

Sumário

Noções de lógica

I. Proposição

1. Chama-se **proposição** ou **sentença** toda oração declarativa que pode ser classificada em verdadeira ou em falsa.

Observamos que toda proposição apresenta três características obrigatórias:

1ª) sendo oração, tem sujeito e predicado;

2ª) é declarativa (não é exclamativa nem interrogativa);

3ª) tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

Exemplos:

São proposições:

a) Nove é diferente de cinco. ($9 \neq 5$)

b) Sete é maior que três. ($7 > 3$)

c) Dois é um número inteiro. ($2 \in \mathbb{Z}$)

d) Três é divisor de onze. ($3 \mid 11$)

e) Quatro vezes cinco é igual a vinte. ($4 \cdot 5 = 20$)

Dessas proposições, todas são verdadeiras, exceto *d*.

Não são consideradas proposições as frases:

f) Três vezes cinco mais um. $(3 \cdot 5 + 1)$
g) A raiz quadrada de dois é número racional? $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}?)$
h) O triplo de um número menos um é igual a onze. $(3x - 1 = 11)$

A frase *f* não tem predicado, a frase *g* é interrogativa e a frase *h* não pode ser classificada em verdadeira ou falsa.

II. Negação

2. A partir de uma proposição *p* qualquer, sempre podemos construir outra, denominada **negação de *p*** e indicada com o símbolo $\sim$p.

Exemplos:

a) p: Nove é diferente de cinco. $(9 \neq 5)$
$\sim$p: Nove é igual a cinco. $(9 = 5)$

b) p: Sete é maior que três. $(7 > 3)$
$\sim$p: Sete é menor ou igual a três. $(7 \leqslant 3)$

c) p: Dois é um número inteiro. $(2 \in \mathbb{Z})$
$\sim$p: Dois não é um número inteiro. $(2 \notin \mathbb{Z})$

d) p: Três é divisor de onze. $(3 \mid 11)$
$\sim$p: Três não é divisor de onze. $(3 \nmid 11)$

e) p: Quatro vezes cinco é igual a vinte. $(4 \cdot 5 = 20)$
$\sim$p: Quatro vezes cinco é diferente de vinte. $(4 \cdot 5 \neq 20)$

Para que $\sim$p seja realmente uma proposição, devemos ser capazes de classificá-la em verdadeira (V) ou falsa (F). Para isso vamos postular (decretar) o seguinte critério de classificação:

A proposição $\sim$p tem sempre o valor oposto de *p*, isto é, $\sim$p é verdadeira quando *p* é falsa e $\sim$p é falsa quando *p* é verdadeira.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, denominada **tabela-verdade** da proposição $\sim$p.

p	$\sim$p
V	F
F	V

Assim, reexaminando os exemplos anteriores, temos que $\sim$p é verdadeira no exemplo *d* e $\sim$p é falsa nos demais.

EXERCÍCIOS

1. Quais das sentenças abaixo são proposições? No caso das proposições, quais são verdadeiras?

a) $5 \cdot 4 = 20$

b) $5 - 4 = 3$

c) $2 + 7 \cdot 3 = 5 \cdot 4 + 3$

d) $5(3 + 1) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 1$

e) $1 + 3 \neq 1 + 6$

f) $(-2)^5 \geqslant (-2)^3$

g) $3 + 4 > 0$

h) $11 - 4 \cdot 2$

2. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições? Que negações são verdadeiras?

a) $3 \cdot 7 = 21$

b) $3 \cdot (11 - 7) \neq 5$

c) $3 \cdot 2 + 1 > 4$

d) $5 \cdot 7 - 2 \leqslant 5 \cdot 6$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$

f) $\sqrt{2} < 1$

g) $-(-4) \geqslant 7$

h) $3 \mid 7$

III. Proposição composta – Conectivos

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados **conectivos**: o conectivo $\wedge$ (lê-se: e) e o conectivo $\vee$ (lê-se: ou).

3. Conectivo $\wedge$

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada **conjunção** das sentenças *p* e *q*.

Exemplos:

1º) p: $2 > 0$
q: $2 \neq 1$
$p \wedge q$: $2 > 0$ e $2 \neq 1$

2º) p: $-2 < -1$
q: $(-2)^2 < (-1)^2$
$p \wedge q$: $-2 < -1$ e $(-2)^2 < (-1)^2$

3º) p: um quadrado de lado *a* tem diagonal 2a
q: um quadrado de lado *a* tem área a^2
$p \wedge q$: um quadrado de lado *a* tem diagonal 2a e área a^2

4º) p: $2 \mid 5$ (2 é divisor de 5)
q: $3 \mid 5$ (3 é divisor de 5)
$p \wedge q$: $2 \mid 5$ e $3 \mid 5$ (2 e 3 são divisores de 5)

Vamos postular um critério para estabelecer o valor lógico (V ou F) de uma conjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições *p* e *q*:

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se *p* e *q* são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, em que são examinadas todas as possibilidades para *p* e *q*. Essa tabela é denominada tabela-verdade da proposição $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Reexaminando os exemplos anteriores, temos:

1º) p: $2 > 0$ (V)
q: $2 \neq 1$ (V)
então:
$p \wedge q$: $2 > 0$ e $2 \neq 1$ (V)

2º) p: $-2 < -1$ (V)
q: $(-2)^2 < (-1)^2$ (F)
então:
$p \wedge q$: $-2 < -1$ e $(-2)^2 < (-1)^2$ (F)

3º) p: um quadrado de lado *a* tem diagonal 2a (F)
q: um quadrado de lado *a* tem área a^2 (V)
então:
$p \wedge q$: um quadrado de lado *a* tem diagonal 2a e área a^2 (F)

4º) p: $2 \mid 5$ (F)
q: $3 \mid 5$ (F)
então:
$p \wedge q$: $2 \mid 5$ e $3 \mid 5$ (F)

4. Conectivo ∨

Colocando o conectivo ∨ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada **disjunção** das sentenças *p* e *q*.

Exemplos:

1º) p: $5 > 0$ (cinco é maior que zero)
q: $5 > 1$ (cinco é maior que um)
$p \vee q$: $5 > 0$ ou $5 > 1$ (cinco é maior que zero ou maior que um)

2º) p: $3 = 3$ (três é igual a três)
q: $3 < 3$ (três é menor que três)
$p \vee q$: $3 \leqslant 3$ (três é menor ou igual a três)

3º) p: 10 é número primo
q: 10 é número composto
$p \vee q$: 10 é número primo ou número composto

4º) p: $3^4 < 2^6$
q: $2^2 < (-3)^5$
$p \vee q$: $3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$

Vamos postular um critério para estabelecer o valor lógico (V ou F) de uma disjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições *p* e *q*:

A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições *p* ou *q* é verdadeira; se *p* e *q* são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição $p \vee q$.

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Revendo os exemplos anteriores, temos:

1º) p: $5 > 0$ (V)
q: $5 > 1$ (V)
então:
$p \vee q$: $5 > 0$ ou $5 > 1$ (V)

2º) p: $3 = 3$ (V)
q: $3 < 3$ (F)
então:
p ∨ q: $3 \leqslant 3$ (V)

3º) p: 10 é número primo (F)
q: 10 é número composto (V)
então:
p ∨ q: 10 é número primo ou composto (V)

4º) p: $3^4 < 2^6$ (F)
q: $2^2 < (-3)^5$ (F)
então:
p ∨ q: $3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$ (F)

EXERCÍCIO

3. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições compostas:

a) $3 > 1$ e $4 > 2$

b) $3 > 1$ ou $3 = 1$

c) $2 \mid 4$ ou $2 \mid (4 + 1)$

d) $3(5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2$ e $3 \mid 7$

e) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ou $5 \mid 11$

f) $(-1)^6 = -1$ e $2^5 < (-2)^7$

g) $\sqrt{16} = 6$ ou mdc $(4, 7) = 2$

IV. Condicionais

Ainda a partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de outros dois símbolos lógicos chamados **condicionais**: o condicional se... então... (símbolo: →) e o condicional ... se, e somente se, ... (símbolo: ↔).

5. Condicional →

Colocando o condicional → entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, p → q, que se lê: "se *p*, então *q*", "*p* é condição suficiente para *q*", "*q* é condição necessária para *p*".

No condicional p → q, a proposição *p* é chamada **antecedente** e *q* é chamada **consequente.**

Exemplos:

1º) p: dois é divisor de quatro $(2 \mid 4)$
q: quatro é divisor de vinte $(4 \mid 20)$
p → q: se dois é divisor de quatro, então quatro é divisor de vinte

$$(2 \mid 4 \rightarrow 4 \mid 20)$$

2º) p: dois vezes cinco é igual a dez $(2 \cdot 5 = 10)$
q: três é divisor de dez $(3 \mid 10)$
p → q: se dois vezes cinco é igual a dez, então três é divisor de dez

$$(2 \cdot 5 = 10 \rightarrow 3 \mid 10)$$

3º) p: cinco é menor que dois $(5 < 2)$
q: dois é número inteiro $(2 \in \mathbb{Z})$
p → q: se cinco é menor que dois, então dois é número inteiro

$$(5 < 2 \rightarrow 2 \in \mathbb{Z})$$

4º) p: um meio é menor que um terço $\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right)$
q: três é igual a cinco $(3 = 5)$
p → q: se um meio é menor que um terço, então três é igual a cinco $\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{3} \rightarrow 3 = 5\right)$

Vamos postular um critério de classificação para a proposição p → q baseado nos valores lógicos de *p* e *q*:

O condicional p → q é falso somente quando *p* é verdadeira e *q* é falsa; caso contrário, p → q é verdadeiro.

Esse critério está resumido na tabela ao lado, denominada tabela-verdade da proposição p → q.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

1º) *p* é V e *q* é V, então p → q é V.
2º) *p* é V e *q* é F, então p → q é F.
3º) *p* é F e *q* é V, então p → q é V.
4º) *p* é F e *q* é F, então p → q é V.

6. Condicional $\leftrightarrow$

Colocando o condicional $\leftrightarrow$ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$, que se lê: "*p* se, e somente se, *q*", "*p* é condição necessária e suficiente para *q*", "*q* é condição necessária e suficiente para *p*" ou "se *p*, então *q* e reciprocamente".

Exemplos:

1º) p: $2 \mid 12$
q: $2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7$
$p \leftrightarrow q$: $2 \mid 12 \leftrightarrow 2 \cdot 7 \mid 12 \cdot 7$

2º) p: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$
q: $3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$
$p \leftrightarrow q$: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \leftrightarrow 3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$

3º) p: $6 = 12 : 3$
q: $3 \cdot 6 = 18$
$p \leftrightarrow q$: $6 = 12 : 3 \leftrightarrow 3 \cdot 6 = 18$

4º) p: $4 \leqslant 3$
q: $4 \cdot 5 \leqslant 3 \cdot 5$
$p \leftrightarrow q$: $4 \leqslant 3 \leftrightarrow 4 \cdot 5 \leqslant 3 \cdot 5$

Vamos postular para o condicional $p \leftrightarrow q$ o seguinte critério de classificação:

O condicional $\leftrightarrow$ é verdadeiro somente quando *p* e *q* são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer, o condicional $\leftrightarrow$ é falso.

Assim a tabela-verdade da proposição $p \leftrightarrow q$ é a que está ao lado.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

1º) *p* é V e *q* é V, então $p \leftrightarrow q$ é V.
2º) *p* é V e *q* é F, então $p \leftrightarrow q$ é F.
3º) *p* é F e *q* é V, então $p \leftrightarrow q$ é F.
4º) *p* é F e q é F, então $p \leftrightarrow q$ é V.

EXERCÍCIOS

4. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo.

a) $2 - 1 = 1 \rightarrow 5 + 7 = 3 \cdot 4$

b) $2^2 = 4 \leftrightarrow (-2)^2 = 4$

c) $5 + 7 \cdot 1 = 10 \rightarrow 3 \cdot 3 = 9$

d) mdc (3, 6) = 1 ↔ 4 é número primo

e) $2 \mid 8 \rightarrow \text{mmc}(2, 8) = 2$

f) $6 \leqslant 2 \leftrightarrow 6 - 2 \geqslant 0$

g) $\frac{3}{5} < \frac{2}{7} \rightarrow 3 \cdot 7 = 2 \cdot 5$

5. Admitindo que *p* e *q* são verdadeiras e *r* é falsa, determine o valor (V ou F) de cada proposição abaixo.

a) $p \rightarrow r$

b) $p \leftrightarrow q$

c) $r \rightarrow p$

d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$

e) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

f) $p \rightarrow (q \vee r)$

g) $\sim p \leftrightarrow \sim q$

h) $\sim p \leftrightarrow r$

6. Sendo a proposição $p \rightarrow (r \vee s)$ falsa e a proposição $(q \wedge \sim s) \leftrightarrow p$ verdadeira, classifique em verdadeira ou falsa as afirmações *p*, *q*, *r* e *s*.

V. Tautologias

7. Seja *v* uma proposição formada a partir de outras (*p*, *q*, *r*, ...) mediante o emprego de conectivos (∨ ou ∧) ou de modificador (∼) ou de condicionais (→ ou ↔). Dizemos que *v* é uma **tautologia** ou **proposição logicamente verdadeira** quando *v* tem o valor lógico V (verdadeira) independentemente dos valores lógicos de *p*, *q*, etc.

Assim a tabela-verdade de uma tautologia *v* apresenta só V na coluna de *v*.

Exemplos:

1º) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$ é uma tautologia, pois:

p	q	∼p	p ∧ ∼p	q ∨ p	(p ∧ ∼p) → (q ∨ p)
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

2º) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ é uma tautologia, pois:

p	q	p ∧ q	∼(p ∧ q)	∼p	∼q	∼p ∨ ∼q	∼(p ∧ q) ↔ (∼p ∨ ∼q)
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

VI. Proposições logicamente falsas

8. Seja *f* uma proposição formada a partir de outras (*p*, *q*, *r*, ...) mediante o emprego de conectivos (∨ ou ∧) ou de modificador (∼) ou de condicionais (→ ou ↔). Dizemos que *f* é uma **proposição logicamente falsa** quando *f* tem o valor lógico F (falsa) independentemente dos valores lógicos de *p*, *q*, etc.

Assim, a tabela-verdade de uma proposição logicamente falsa *f* apresenta só F na coluna de *f*.

Exemplos:

1º) $p \wedge \sim p$ é uma proposição logicamente falsa, pois:

p	∼p	p ∧ ∼p
V	F	F
F	V	F

2º) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	∼p	∼q	p ∨ ∼q	∼p ∧ q	(p ∨ ∼q) ↔ (∼p ∧ q)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

VII. Relação de implicação

9. Dadas as proposições *p* e *q*, dizemos que "*p* **implica** *q*" quando na tabela de *p* e *q* não ocorre VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente *p* verdadeira e *q* falsa.

Quando *p* implica *q*, indicamos $p \Rightarrow q$.

Observações:

1ª) Notemos que *p* implica *q* quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema é uma implicação da forma

$$\text{hipótese} \Rightarrow \text{tese}$$

Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso de a hipótese ser verdadeira e a tese ser falsa.

Exemplos:

1º) $2 \mid 4 \Rightarrow 2 \mid 4 \cdot 5$

significa dizer que o condicional "se 2 é divisor de 4, então 2 é divisor de $4 \cdot 5$" é verdadeiro.

2º) *p* é positivo e primo $\Rightarrow \text{mdc}(p, p^2) = p$

quer dizer que o condicional "se *p* é número primo e positivo, então o máximo divisor comum de *p* e p^2 é p" é verdadeiro.

VIII. Relação de equivalência

10. Dadas as proposições *p* e *q*, dizemos que "*p* é **equivalente** a *q*" quando *p* e *q* têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando *p* e *q* têm sempre o mesmo valor lógico.

Quando *p* é equivalente a *q*, indicamos: $p \Leftrightarrow q$.

Observações:

1ª) Notemos que *p* equivale a *q* quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema cujo recíproco também é verdadeiro é uma equivalência.

$$\text{hipótese} \Leftrightarrow \text{tese}$$

Exemplos:

1º) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

p	q	p → q	~q	~p	~q → ~p
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

2º) $2 \mid 8 \Leftrightarrow \text{mdc}(2, 8) = 2$ significa dizer que é verdadeiro o bicondicional "2 é divisor de 8 se, e somente se, o máximo divisor comum de 2 e 8 é 2".

EXERCÍCIO

7. Verifique, por meio das tabelas-verdades, a validade das equivalências abaixo.

a) da conjunção
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$
$p \wedge v \Leftrightarrow p$
$p \wedge f \Leftrightarrow f$

b) da disjunção
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$p \vee p \Leftrightarrow p$
$p \vee v \Leftrightarrow v$
$p \vee f \Leftrightarrow p$

c) da conjunção relativamente à disjunção
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

d) da negação
$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

em que *p*, *q* e *r* são proposições quaisquer, *v* é uma tautologia e *f* uma proposição logicamente falsa.

IX. Sentenças abertas, quantificadores

11. Há expressões como:

a) $x + 1 = 7$
b) $x > 2$
c) $x^3 = 2x^2$

que contêm variáveis e cujo valor lógico (verdadeira ou falsa) vai depender do valor atribuído à variável.

Nos exemplos citados, temos:

a) $x + 1 = 7$ é verdadeira se trocarmos x por 6 e é falsa para qualquer outro valor dado a x;

b) $x > 2$ é falsa, por exemplo, para $x = 0$;

c) $x^3 = 2x^2$ é verdadeira se trocarmos x por 0 ($0^3 = 2 \cdot 0^2$) ou 2 ($2^3 = 2 \cdot 2^2$) e é falsa para qualquer outro valor dado a x.

Orações que contêm variáveis são chamadas **funções proporcionais** ou **sentenças abertas**. Tais orações não são proposições, pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, depende do valor dado às variáveis.

Há, entretanto, duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições:

1ª) atribuir valor às variáveis;

2ª) utilizar quantificadores.

12. O quantificador universal

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada".

Exemplos:

1º) $(\forall x)\ (x + 1 = 7)$, que se lê:

"qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$". (F)

2º) $(\forall x)\ (x^3 = 2x^2)$, que se lê:

"para todo número x, temos $x^3 = 2x^2$". (F)

3º) $(\forall a)\ ((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$, que se lê:

"qualquer que seja o número a, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$". (V)

4º) $(\forall y)\ (y^2 + 1 > 0)$, que se lê:

"para todo número y, temos $y^2 + 1$ positivo". (V)

13. O quantificador existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um" ou "existe um".

Exemplos:

1º) $(\exists x)\ (x + 1 = 7)$, que se lê:

"existe um número x tal que $x + 1 = 7$". (V)

2º) $(\exists x)\ (x^3 = 2x^2)$, que se lê:

"existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$". (V)

3º) $(\exists a)\ (a^2 + 1 \leqslant 0)$, que se lê:

"existe um número a tal que $a^2 + 1$ é não positivo". (F)

4º) $(\exists m)\ (m(m + 1) \neq m^2 + m)$, que se lê:

"existe pelo menos um número m tal que $m(m + 1) \neq m^2 + m$". (F)

14. Algumas vezes utilizamos também outro quantificador: $\exists|$, que se lê: "existe um único", "existe um e um só" ou "existe só um".

Exemplos:

1º) $(\exists|\,x)\ (x + 1 = 7)$, que se lê:

"existe um só número x tal que $x + 1 = 7$". (V)

2º) $(\exists|\,x)\ (x^3 = 2x^2)$, que se lê:

"existe um só número x tal que $x^3 = 2x^2$". (F)

3º) $(\exists|\,x)\ (x + 2 > 3)$, que se lê:

"existe um único número x tal que $x + 2 > 3$". (F)

EXERCÍCIO

8. Transforme as seguintes sentenças abertas em proposições verdadeiras usando quantificadores:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$

c) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7}$

d) $\sqrt{m^2} + 9 \neq m + 3$

e) $-(-x) = x$

f) $5a + 4 \leqslant 11$

g) $\sqrt{x^2} = x$

h) $\frac{a^2 - a}{a} = a - 1$

X. Como negar proposições

Já vimos o que é a negação de uma proposição simples, no item II deste capítulo.

Vamos destacar aqui resultados obtidos no exercício 7, os quais constituem processos para negar proposições compostas e condicionais.

15. Negação de uma conjunção

Tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplos:

1º) p: $a \neq 0$

q: $b \neq 0$

$p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

$\sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

2º) p: $2 \mid 4$

q: $3 \mid 9$

$p \wedge q$: $2 \mid 4$ e $3 \mid 9$

$\sim(p \wedge q)$: $2 \nmid 4$ ou $3 \nmid 9$

16. Negação de uma disjunção

Tendo em vista que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplos:

1º) p: o triângulo ABC é isósceles

q: o triângulo ABC é equilátero

$p \vee q$: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero

$\sim(p \vee q)$: o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

2º) p: $a = 0$

q: $b = 0$

$p \vee q$: $a = 0$ ou $b = 0$

$\sim(p \vee q)$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

17. Negação de um condicional simples

Já que $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplos:

1º) p: $2 \in \mathbb{Z}$

q: $2 \in \mathbb{Q}$

$p \rightarrow q$: $2 \in \mathbb{Z} \rightarrow 2 \in \mathbb{Q}$

$\sim(p \rightarrow q)$: $2 \in \mathbb{Z}$ e $2 \notin \mathbb{Q}$

2º) p: $5^2 = (-5)^2$

q: $5 = -5$

$p \rightarrow q$: $5^2 = (-5)^2 \rightarrow 5 = -5$

$\sim(p \rightarrow q)$: $5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5$

18. Negação de proposições quantificadas

a) Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se p(x), obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$.

Exemplos:

1º) sentença: $(\forall x)\ (x + 3 = 5)$
negação: $(\exists x)\ (x + 3 \neq 5)$

2º) sentença: $(\forall x)\ (x(x + 1) = x^2 + x)$
negação: $(\exists x)\ (x(x + 1) \neq x^2 + x)$

3º) sentença: $(\forall x)\ \left(\sqrt{x^2 + 1} = x + 1\right)$
negação: $(\exists x)\ \left(\sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1\right)$

4º) sentença: Todo losango é um quadrado.
negação: Existe um losango que não é quadrado.

b) Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo universal e nega-se p(x), obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$.

Exemplos:

1º) sentença: $(\exists x)\ (x = x)$
negação: $(\forall x)\ (x \neq x)$

2º) sentença: $(\exists a)\left(a + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}\right)$

negação: $(\forall a)\left(a + \frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right)$

3º) sentença: $(\exists a)\left(\frac{1}{a} \in \mathbb{R}\right)$

negação: $(\forall a)\left(\frac{1}{a} \notin \mathbb{R}\right)$

EXERCÍCIOS

9. Diga qual é a negação de cada proposição abaixo.

a) mdc $(2, 3) = 1$ ou mmc $(2, 3) \neq 6$

b) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ ou $3 \cdot 10 \neq 6 \cdot 5$

c) $\frac{3}{7} \geqslant 1$ e $-3 \geqslant -7$

d) $2^2 = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

e) $(-3)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} \neq -3$

f) $2 \leqslant 5 \rightarrow 3^2 \leqslant 5^2$

g) $(\forall x)\ (x > 2 \rightarrow 3^x > 3^2)$

h) $(\exists x)\ (\sqrt{x} < 0)$

i) Todo número inteiro primo é ímpar.

j) Todo triângulo isósceles é equilátero.

k) Existe um losango que não é quadrado.

l) Existe um número cuja raiz quadrada é zero.

m) Todo triângulo que tem três ângulos congruentes tem três lados congruentes.

10. Classifique em V ou F as negações construídas no exercício anterior.

CAPÍTULO II

Conjuntos

Faremos aqui uma revisão das principais noções da teoria dos conjuntos, naquilo que importa à Matemática elementar. Em seguida usaremos essas noções para apresentar os principais conjuntos de números.

I. Conjunto – Elemento – Pertinência

19. Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição, isto é, são consideradas noções primitivas:

- conjunto;
- elemento;
- pertinência entre elemento e conjunto.

A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum: é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Eis alguns exemplos:

1º) conjunto das vogais
2º) conjunto dos algarismos romanos
3º) conjunto dos números ímpares positivos
4º) conjunto dos planetas do sistema solar
5º) conjunto dos números primos positivos
6º) conjunto dos naipes das cartas de um baralho
7º) conjunto dos nomes dos meses de 31 dias

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado **elemento**. Assim, nos exemplos anteriores, temos os elementos:

1º) a, e, i, o, u
2º) I, V, X, L, C, D, M
3º) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
4º) Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, ...
5º) 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
6º) paus, ouros, copas, espadas
7º) janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro

No 3º exemplo, cada número ímpar é elemento do conjunto dos números ímpares, isto é, pertence ao conjunto. Em particular, 5 pertence ao conjunto dos números ímpares e 2 não pertence.

Um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, etc. É importante notar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto. Por exemplo, o conjunto das seleções que disputam um campeonato mundial de futebol é um conjunto formado por equipes que, por sua vez, são conjuntos de jogadores.

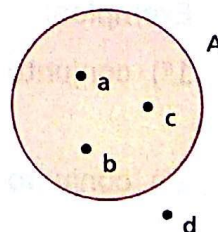
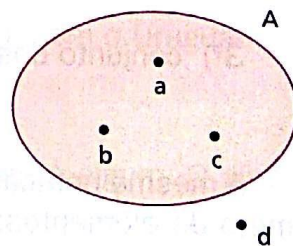
Indicamos um conjunto, em geral, com uma letra maiúscula, A, B, C, ..., e um elemento com uma letra minúscula, a, b, c, d, x, y, ...

Sejam A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escrevemos:

$$x \in A$$

Para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos:

É habitual representar um conjunto pelos pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada. Assim, na representação ao lado, temos:

No caso de usarmos um círculo para representar um conjunto, estaremos usando o assim chamado **diagrama de Euler-Venn**.

II. Descrição de um conjunto

Utilizamos dois recursos principais para descrever um conjunto e seus elementos: enumeramos (citamos, escrevemos) os elementos do conjunto ou damos uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

20. Descrição pela citação dos elementos

Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, devemos indicá-lo escrevendo seus elementos entre chaves.

Exemplos:

1º) conjunto das vogais: {a, e, i, o, u}

2º) conjunto dos algarismos romanos: {I, V, X, L, C, D, M}

3º) conjunto dos nomes de meses de 31 dias:

{janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}

Essa notação também é empregada quando o conjunto é infinito: escrevemos alguns elementos que evidenciem a lei de formação e em seguida colocamos reticências.

Exemplos:

1º) conjunto dos números ímpares positivos:

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$$

2º) conjunto dos números primos positivos:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

3º) conjunto dos múltiplos inteiros de 3:

$$\{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, ...\}$$

A mesma notação também é empregada quando o conjunto é finito com grande número de elementos: escrevemos os elementos iniciais, colocamos reticências e indicamos o último elemento.

Exemplos:

1º) conjunto dos números inteiros de 0 a 500:

$$\{0, 1, 2, 3, ..., 500\}$$

2º) conjunto dos divisores positivos de 100:

$$\{1, 2, 5, 10, ..., 100\}$$

21. Descrição por uma propriedade

Quando queremos descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos x, escrevemos:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

e lemos: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Exemplos:

1º) $\{x \mid x \text{ é estado da região Sul do Brasil}\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

{Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}

2º) $\{x \mid x \text{ é divisor inteiro de } 3\}$ é uma maneira de indicar o conjunto:

$$\{1, -1, 3, -3\}$$

3º) $\{x \mid x \text{ é inteiro e } 0 \leqslant x \leqslant 500\}$ pode também ser indicado por:

$$\{0, 1, 2, 3, ..., 500\}$$

III. Conjunto unitário – Conjunto vazio

22. Chama-se **conjunto unitário** aquele que possui um único elemento.

Exemplos:

1º) conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos: $\{1\}$

2º) conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$

3º) conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai:

{Rio Grande do Sul}

23. Chama-se **conjunto vazio** aquele que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é $\varnothing$.

Obtemos um conjunto vazio quando descrevemos um conjunto por meio de uma propriedade P logicamente falsa.

Exemplos:

1º) $\{x \mid x \neq x\} = \varnothing$

2º) $\{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \varnothing$

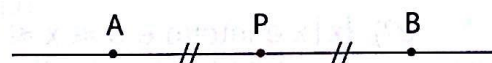
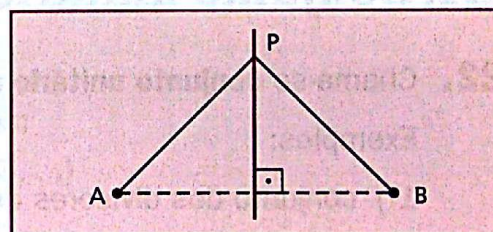
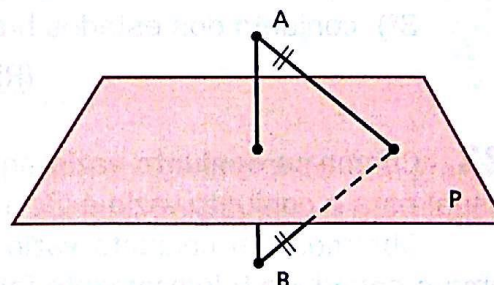
3º) $\{x \mid x > 0 \text{ e } x < 0\} = \varnothing$

IV. Conjunto universo

24. Quando vamos desenvolver um certo assunto de Matemática, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto U recebe o nome de **conjunto universo**.

Assim, se procuramos as soluções reais de uma equação, nosso conjunto universo é $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais); se estamos resolvendo um problema cuja solução vai ser um número inteiro, nosso conjunto universo é $\mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros); se estamos resolvendo um problema de Geometria Plana, nosso conjunto universo é um certo plano α.

Quase sempre a resposta para algumas questões depende do universo U em que estamos trabalhando. Consideremos a questão: "Qual é o conjunto dos pontos P que ficam a igual distância de dois pontos dados A e B, sendo $A \neq B$?"

1) Se U é a reta $\overleftrightarrow{AB}$, o conjunto procurado é formado só por P;

2) Se U é um plano contendo A e B, o conjunto procurado é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$;

3) Se U é o espaço, o conjunto procurado é o plano mediador do segmento $\overline{AB}$ (plano perpendicular a $\overline{AB}$ no seu ponto médio).

Portanto, quando vamos descrever um conjunto A através de uma propriedade P, é essencial fixarmos o conjunto universo U em que estamos trabalhando, escrevendo:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$$

EXERCÍCIOS

11. Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

A = {x | x é letra da palavra **matemática**}
B = {x | x é cor da bandeira brasileira}
C = {x | x é nome do estado brasileiro que começa com a letra *a*}

Solução

A = {m, a, t, e, i, c}
B = {branco, azul, amarelo, verde}
C = {Amazonas, Amapá, Acre, Alagoas}

12. Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:

A = {0, 2, 4, 6, 8, ...}
B = {0, 1, 2, ..., 9}
C = {Brasília, Rio de Janeiro, Salvador}

Solução

A = {x | x é inteiro, par e não negativo}
B = {x | x é algarismo arábico}
C = {x | x é nome de cidade que já foi capital do Brasil}

13. Escreva com símbolos:

a) o conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e $+10$;
b) o conjunto dos divisores inteiros de 42;
c) o conjunto dos múltiplos inteiros de 0;
d) o conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3;
e) o conjunto dos nomes das capitais da região Centro-Oeste do Brasil.

14. Descreva por meio de uma propriedade dos elementos:

A = {+1, −1, +2, −2, +3, −3, +6, −6}
B = {0, −10, −20, −30, −40, ...}
C = {1, 4, 9, 16, 25, 36, ...}
D = {Lua}

15. Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$A = \left\{x \mid x < \frac{9}{4} \text{ e } x > \frac{6}{5}\right\}$

$B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$

$C = \{x \mid x \text{ é inteiro e } x^2 = 3\}$

$D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$

16. Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$

$B = \left\{x \mid x > \frac{9}{4} \text{ e } x < \frac{6}{5}\right\}$

$C = \{x \mid x \text{ é divisor de zero}\}$

$D = \{x \mid x \text{ é divisível por zero}\}$

V. Conjuntos iguais

25. Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

1º) $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$

2º) $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \{x \mid x \text{ é inteiro, positivo e ímpar}\}$

3º) $\{x \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$

Observemos que na definição de igualdade entre conjuntos não intervém a noção de ordem entre os elementos; portanto:

$$\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{b, a, c, d\}$$

Observemos ainda que a repetição de um elemento na descrição de um conjunto é algo absolutamente inútil, pois, por exemplo:

$$\{a, b, c, d\} = \{a, a, b, b, b, c, d, d, d, d\}$$

para conferir basta usar a definição. Assim, preferimos sempre a notação mais simples.

26. Se A não é igual a B, escrevemos $A \neq B$. É evidente que A é diferente de B se existe um elemento de A não pertencente a B ou existe em B um elemento não pertencente a A.

Exemplo:

$$\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$$

VI. Subconjuntos

27. Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.

Com a notação $A \subset B$ indicamos que "A é subconjunto de B" ou "A está contido em B" ou "A é parte de B".

O símbolo $\subset$ é denominado **sinal de inclusão.**

Em símbolos, a definição fica assim:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Exemplos:

1º) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

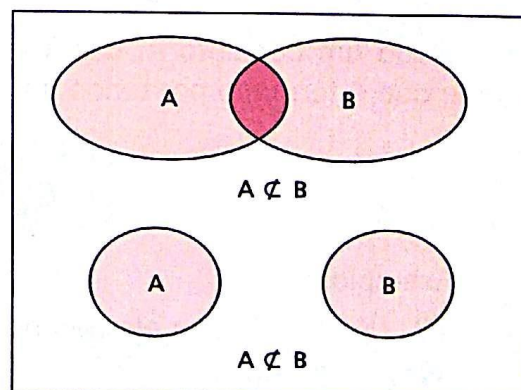
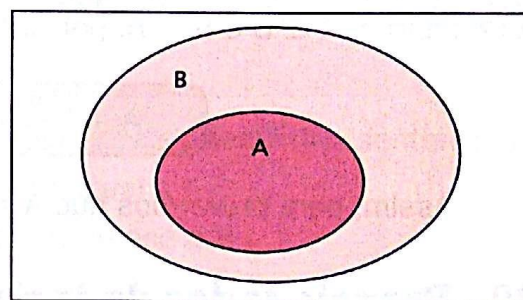
2º) $\{a\} \subset \{a, b\}$

3º) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$

4º) $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x \mid x \text{ é inteiro}\}$

28. Quando $A \subset B$, também podemos escrever $B \supset A$, que se lê "B contém A".

Com a notação $A \not\subset B$ indicamos que "A não está contido em B", isto é, a negação de $A \subset B$.

É evidente que $A \not\subset B$ somente se existe ao menos um elemento de A que não pertence a B.

Assim, por exemplo, temos:

1º) $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c, d, e\}$

2º) $\{a, b\} \not\subset \{c, d, e\}$

3º) $\{x \mid x \text{ é inteiro e par}\} \not\subset \{x \mid x \text{ é inteiro e primo}\}$

29. Conjuntos iguais

Vimos anteriormente o conceito de igualdade de conjuntos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Nessa definição está explícito que todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$; portanto, podemos escrever:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$$

Assim, para provarmos que $A = B$, devemos provar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

30. Propriedades da inclusão

Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\varnothing \subset A$

2ª) $A \subset A$ (reflexiva)

3ª) $(A \subset B \text{ e } B \subset A) \Rightarrow A = B$ (antissimétrica)

4ª) $(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

A demonstração dessas propriedades é imediata, com exceção da 1ª, que passamos a provar. Para todo x, a implicação

$$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$$

é verdadeira, pois $x \in \varnothing$ é falsa. Então, por definição de subconjunto, $\varnothing \subset A$.

31. Conjunto das partes

Dado um conjunto A, chama-se **conjunto das partes** de A – notação $\mathcal{P}(A)$ – aquele que é formado por todos os subconjuntos de A. Em símbolos:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$$

Exemplos:

1º) Se $A = \{a\}$, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\varnothing$ e $\{a\}$, isto é:
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$.

2º) Se $A = \{a, b\}$, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\varnothing$ e $\{a\}$, $\{b\}$ e $\{a, b\}$, isto é:
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

3º) Se $A = \{a, b, c\}$, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$, isto é:
$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$.

EXERCÍCIOS

17. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$:

a) escreva com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

1ª) 3 é elemento de A
2ª) 1 não está em B
3ª) B é parte de A
4ª) B é igual a A
5ª) 4 pertence a B

b) classifique as sentenças anteriores em falsas ou verdadeiras.

Solução

1ª) $3 \in A$ (V)
2ª) $1 \notin B$ (V)
3ª) $B \subset A$ (V)
4ª) $B = A$ (F)
5ª) $4 \in B$ (V)

18. Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em V ou F cada sentença abaixo e justifique.

a) $A \subset D$
b) $A \subset B$
c) $B \subset C$
d) $D \supset B$
e) $C = D$
f) $A \not\subset C$

Solução

a) V, pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$
b) F, pois $1 \in A$ e $1 \notin B$
c) F, pois $2 \in B$ e $2 \notin C$
d) V, pois $2 \in B$, $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$
e) F, pois $2 \in D$ e $2 \notin C$
f) V, pois $2 \in A$ e $2 \notin C$

19. Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$

b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$

c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$

d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

20. Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo.

a) $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $\{a\} \in \{a, b\}$

c) $\varnothing \in \{0\}$

d) $0 \in \varnothing$

e) $\{a\} \subset \varnothing$

f) $a \in \{a, \{a\}\}$

g) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$

h) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{a\}\}$

i) $\varnothing \in \{\varnothing, \{a\}\}$

j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

21. Faça um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C e D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

22. Construa o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

VII. Reunião de conjuntos

32. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **reunião** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O conjunto $A \cup B$ (lê-se "A reunião B" ou "A u B") é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Notemos que x é elemento de $A \cup B$ se ocorre ao menos uma das condições seguintes:

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

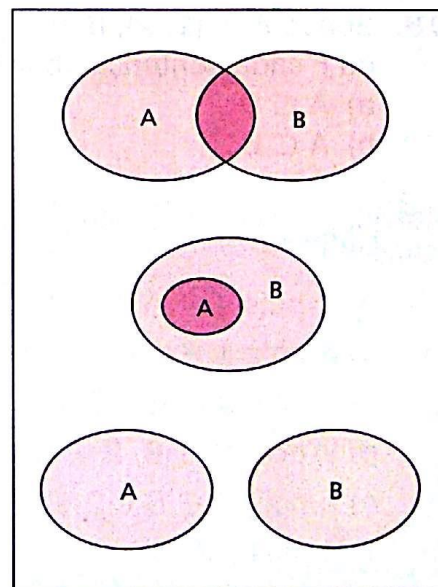
Exemplos:

1º) $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

2º) $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

3º) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$

4º) $\{a, b, c\} \cup \varnothing = \{a, b, c\}$

5º) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

33. Propriedades da reunião

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cup A = A$ (idempotente)

2ª) $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)

3ª) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

Demonstração:

Fazendo $A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$ ou, simplesmente, $A = \{x \mid p(x)\}$ e ainda: $B = \{x \mid q(x)\}$, $C = \{x \mid r(x)\}$ e $\varnothing = \{x \mid f(x)\}$ em que *f* é proposição logicamente falsa, temos:

$$A \cup A = \{x \mid p(x) \text{ ou } p(x)\} = \{x \mid p(x)\} = A.$$

Analogamente, as demais decorrem das propriedades das proposições vistas no exercício 7.

VIII. Interseção de conjuntos

34. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **interseção** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$$

O conjunto $A \cap B$ (lê-se "A inter B") é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos (A e B) simultaneamente.

Se $x \in A \cap B$, isso significa que *x* pertence a A e também *x* pertence a B. O conectivo *e* colocado entre duas condições significa que elas devem ser obedecidas ao mesmo tempo.

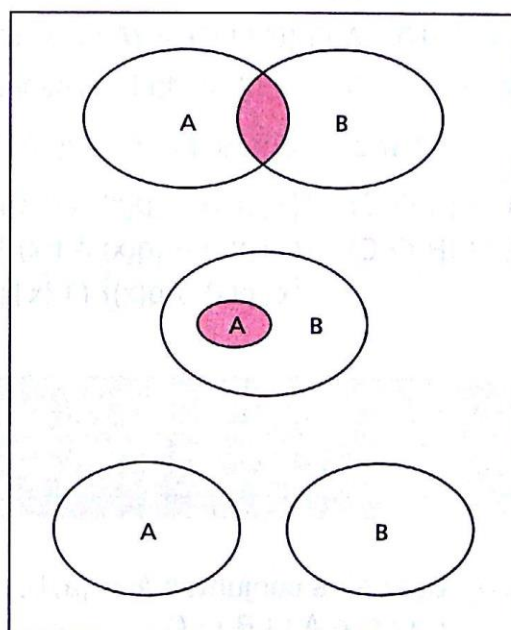
Exemplos:

1º) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$

2º) $\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$

3º) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$

4º) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$

5º) $\{a, b\} \cap \varnothing = \varnothing$

35. Propriedades da interseção

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)

2ª) $A \cap U = A$ (elemento neutro)

3ª) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

4ª) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

Como mostramos para a operação de reunião, essas propriedades são também demonstráveis com auxílio do exercício 7.

36. Conjuntos disjuntos

Quando $A \cap B = \varnothing$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum, A e B são denominados **conjuntos disjuntos**.

IX. Propriedades

37. Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a reunião e a interseção de conjuntos:

1ª) $A \cup (A \cap B) = A$

2ª) $A \cap (A \cup B) = A$

3ª) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributiva da reunião em relação à interseção)

4ª) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributiva da interseção em relação à reunião)

Demonstremos, por exemplo, a 1ª e a 3ª:

$$A \cup (A \cap B) = \{x \mid p(x) \vee (p(x) \wedge q(x))\} = \{x \mid p(x)\} = A$$

$$A \cup (B \cap C) = \{x \mid p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))\} = \{x \mid (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))\} =$$
$$= \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \cap \{x \mid p(x) \vee r(x)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCÍCIOS

23. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.

24. Prove que $A \subset (A \cup B)$, $\forall$ A.

Solução

$x \in A \Rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
é uma implicação verdadeira, $\forall$ x; portanto: $A \subset (A \cup B)$.

25. Classifique em V ou F:

a) $\varnothing \subset (A \cup B)$
b) $(A \cup B) \subset A$
c) $A \supset (A \cup B)$
d) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$
e) $B \subset (A \cup B)$
f) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

26. Determine a reunião dos círculos de raio *r*, contidos num plano α e que têm um ponto comum $O \in \alpha$.

27. Determine a reunião das retas de um plano α que são paralelas a uma dada reta *r* de α.

28. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, descreva $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

29. Prove que $(A \cap B) \subset A$, $\forall$ A.

Solução

$x \in (A \cap B) \Rightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Rightarrow x \in A$
é uma implicação verdadeira, $\forall$ x; portanto: $(A \cap B) \subset A$.

30. Classifique em V ou F:

a) $\varnothing \subset (A \cap B)$
b) $A \subset (A \cap B)$
c) $A \in (A \cap B)$
d) $(A \cap B) \subset (A \cap B)$
e) $(A \cap B) \subset B$
f) $(A \cap B) \supset (A \cap B \cap C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

31. Considere os conjuntos:
K = conjunto dos quadriláteros planos
$P = \{x \in K \mid x$ tem lados 2 a 2 paralelos$\}$
$L = \{x \in K \mid x$ tem 4 lados congruentes$\}$
$R = \{x \in K \mid x$ tem 4 ângulos retos$\}$
$Q = \{x \in K \mid x$ tem 4 lados congruentes e 2 ângulos retos$\}$
Determine os conjuntos:
a) $L \cap P$
b) $R \cap P$
c) $L \cap R$
d) $Q \cap R$
e) $L \cap Q$
f) $P \cup Q$

32. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determine o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \varnothing$.

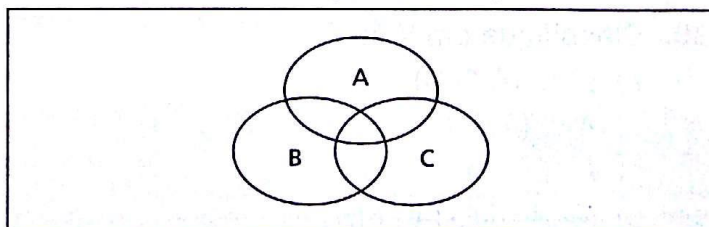
Solução

a) $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, então os possíveis elementos de X são: 1, 2, 3 e 4.
b) $X \cap B = \varnothing \Rightarrow 3 \notin X$ e $4 \notin X$
Conclusão: $X = \{1, 2\}$.

33. Determine o conjunto X tal que:
$\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$.

34. Sabe-se que $A \cup B \cup C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 10\}$, $A \cap B = \{2, 3, 8\}$, $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$ e $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$.
Determine C.

35. Determine o número de conjuntos X que satisfazem a relação $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

36. Assinale no diagrama abaixo, um de cada vez, os seguintes conjuntos:
a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cap (B \cup C)$
c) $A \cup (B \cap C)$
d) $A \cup B \cup C$

37. Sejam os conjuntos A com 2 elementos, B com 3 elementos, C com 4 elementos. Qual é o número máximo de elementos de $(A \cap B) \cap C$?

X. Diferença de conjuntos

38. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença entre A e B** o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

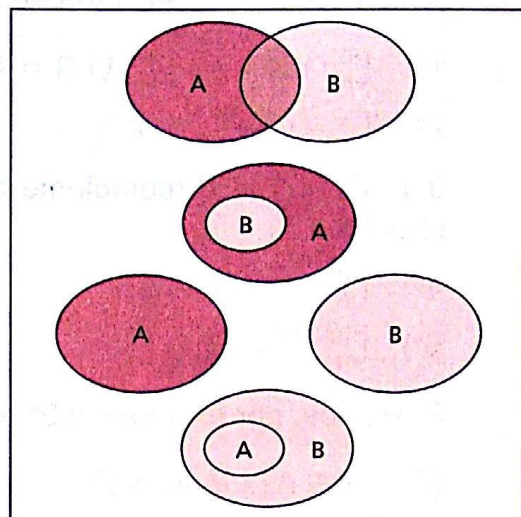
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos:

1º) $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$

2º) $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$

3º) $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

4º) $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \varnothing$

XI. Complementar de B em A

39. Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, o conjunto $A - B$ chama-se **complementar** de B em relação a A, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

Com o símbolo

$$\complement_A^B \quad \text{ou} \quad \overline{B}$$

indicamos o complementar de B em relação a A.

Notemos que $\complement_A^B$ só é definido para $B \subset A$, e aí temos:

$$\complement_A^B = A - B$$

Exemplos:

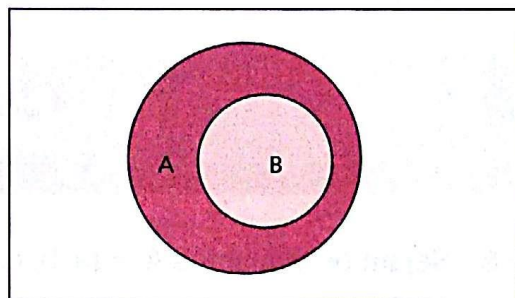
1º) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, d, e\}$, então:

$$\complement_A^B = \{a, b\}$$

2º) Se $A = \{a, b, c, d\} = B$, então:

$$\complement_A^B = \varnothing$$

3º) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \varnothing$, então:

$$\complement_A^B = \{a, b, c, d\} = A$$

40. Propriedades da complementação

Sendo B e C subconjuntos de A, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\complement_A^B \cap B = \varnothing$ e $\complement_A^B \cup B = A$

2ª) $\complement_A^A = \varnothing$ e $\complement_A^{\varnothing} = A$

3ª) $\complement_A (\complement_A^B) = B$ (complementar em relação a A do complementar de B em relação a A)

4ª) $\complement_A^{(B \cap C)} = \complement_A^B \cup \complement_A^C$

5ª) $\complement_A^{(B \cup C)} = \complement_A^B \cap \complement_A^C$

Provemos, por exemplo, a 2ª e a 4ª propriedades:

$\complement_A^A = \{x \in A \mid x \notin A\} = \varnothing$

$\complement_A^{\varnothing} = \{x \in A \mid x \notin \varnothing\} = A$

$\complement_A^{(B \cap C)} = \{x \in A \mid x \notin B \cap C\} = \{x \in A \mid x \notin B \text{ ou } x \notin C\} =$
$= \{x \in A \mid x \notin B\} \cup \{x \in A \mid x \notin C\} = \complement_A^B \cup \complement_A^C$

EXERCÍCIOS

38. Sejam os conjuntos A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f, g} e C = {b, d, e, g}. Determine:

a) $A - B$
b) $B - A$
c) $C - B$
d) $(A \cup C) - B$
e) $A - (B \cap C)$
f) $(A \cup B) - (A \cap C)$

39. Prove que $(A - B) \subset A, \forall A$.

Solução

A implicação $x \in (A - B) \Rightarrow (x \in A \text{ e } x \notin B) \Rightarrow x \in A$ é verdadeira para todo *x*, então $(A - B) \subset A$.

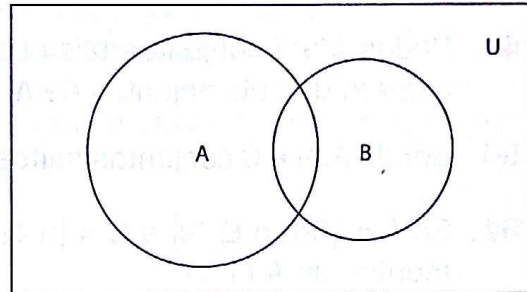
40. Classifique em V ou F as sentenças:

a) $(A - B) \supset \varnothing$
b) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
c) $(A - B) \subset B$
d) $(A - B) \subset (A \cup B)$

admitindo que A e B são conjuntos quaisquer.

41. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$, obtenha um conjunto X tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

42. Assinale no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

a) $\overline{A} - B$
b) $\overline{A} - A \cup B$
c) $\overline{B} \cup A$
d) $\overline{A \cup B}$
e) $\overline{A \cap B}$
f) $\overline{B} \cap A$

43. Prove que $A - \overline{B} = A \cap B$, em que A e B são conjuntos quaisquer do universo U.

Solução

A implicação $x \in (A - \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \notin \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ é verdadeira $\forall x$; portanto, está provado.

44. Classifique em V ou F as seguintes sentenças:

a) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
b) $A \subset B \Rightarrow (\complement B) \subset (\complement A)$
c) $(A - B) \subset (\complement A)$
d) $(A - B) \subset (\complement B)$

Observação: $\complement A = U - A$

45. Sendo $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $p(y)$: $y + 1 \leqslant 6$ e $F = \{y \in E \mid y \text{ satisfaz } p(y)\}$, determine $\overline{F}$.

46. Descreva os elementos dos conjuntos abaixo:

$A = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$
$B = \{x \mid x$ é letra da palavra **exercício**$\}$
$C = \{x \mid x^2 - 9 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 9\}$
$D = \{x \mid 2x + 1 = 0 \text{ e } 2x^2 - x - 1 = 0\}$
$E = \{x \mid x$ é algarismo do número 234 543$\}$

47. Seja $E = \{a, \{a\}\}$. Diga quais das proposições abaixo são verdadeiras.

a) $a \in E$
b) $\{a\} \in E$
c) $a \subset E$
d) $\{a\} \subset E$
e) $\varnothing \in E$
f) $\varnothing \subset E$

48. Sejam A e B dois conjuntos finitos. Prove que

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}.$$

O símbolo n_x representa o número de elementos do conjunto X.

49. Dados A e B conjuntos tais que $n(A) = 4$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 3$, determine o número de subconjuntos de $A \cup B$.

50. Sendo A, B e C conjuntos finitos, estabeleça uma fórmula para calcular $n_{A \cup B \cup C}$.

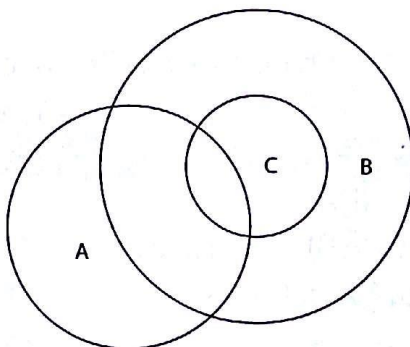
51. Se $A = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é divisor de } 120\}$, qual é o número de elementos de $A \cap B$?

52. Em uma escola que tem 415 alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam inglês ou francês? Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

53. Denotando-se por X' o complementar de um conjunto qualquer X, determine o conjunto $[P' \cup (P \cap Q)]$, quaisquer que sejam os conjuntos P e Q.

54. Considerando os conjuntos A, B e C, representados abaixo, e sabendo que

$n(A \cup B) = 24$
$n(A \cap B) = 4$
$n(B \cup C) = 16$
$n(A - C) = 11$
$n(B - C) = 10$, calcule:

a) $n(A - B)$
b) $n(A \cap B \cap C)$
c) $n(B - (C \cup A))$
d) $n((A \cap B) - C)$
e) $n(B - (A \cap B))$

55. Sabendo que A e B são subconjuntos de U,
$\overline{A} = \{e, f, g, h, i\}$, $A \cap B = \{c, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, responda:
Quantos elementos tem A? E B?
Observação: $\overline{A}$ é o complementar de A em U.

56. Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo:

Marca	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B e C	Nenhuma das três
Número de consumidores	109	203	162	25	41	28	5	115

Forneça:
a) o número de pessoas consultadas;
b) o número de pessoas que só consomem a marca A;
c) o número de pessoas que não consomem as marcas A ou C;
d) o número de pessoas que consomem ao menos duas marcas.

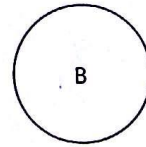
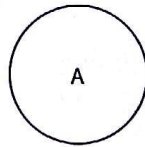
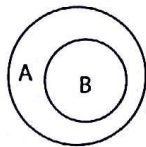
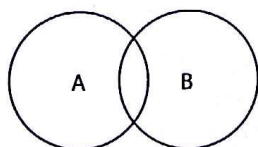
57. Determine os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes seis condições:
1ª) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}$
2ª) $A \cap B = \{r, s\}$
3ª) $B \cap C = \{s, x\}$
4ª) $C \cap A = \{s, t\}$
5ª) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$
6ª) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, x, z\}$

58. Em certa comunidade há indivíduos de três etnias: branca, negra e amarela. Sabendo que 70 são brancos, 350 são não negros e 50% são amarelos, responda:
a) quantos indivíduos tem a comunidade?
b) quantos são os indivíduos amarelos?

59. De todos os empregados de uma firma, 30% optaram por um plano de assistência médica. A firma tem a matriz na capital de São Paulo e somente duas filiais, uma em Santos e outra em Campinas. 45% dos empregados trabalham na matriz e 20% dos empregados trabalham na filial de Santos. Sabendo que 20% dos empregados da capital optaram pelo plano de assistência médica e que 35% dos empregados da filial de Santos o fizeram, qual a porcentagem dos empregados da filial de Campinas que optaram pelo plano?

60. Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença simétrica de A com B o conjunto $A \triangle B$ tal que:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

a) Determine $\{a, b, c, d\} \triangle \{c, d, e, f, g\}$.
b) Prove que $A \triangle \varnothing = A$, para todo A.
c) Prove que $A \triangle A = \varnothing$, para todo A.
d) Prove que $A \triangle B = B \triangle A$, para A e B quaisquer.
e) Assinale em cada diagrama abaixo o conjunto $A \triangle B$.

61. Desenhe um diagrama de Venn representando quatro conjuntos, A, B, C e D, não vazios, de modo que se tenha:

$$A \not\subset B, B \not\subset A, C \supset (A \cup B) \quad e \quad D \subset (A \cap B).$$

LEITURA

Cantor e a teoria dos conjuntos

Hygino H. Domingues

A natureza do infinito é uma questão antiga e controversa. Arquimedes (287-212 a.C.) fazia distinção entre **infinito potencial** e **infinito atual**. Este último, que vem a ser o infinito como algo completo, era descartado por não haver nenhuma evidência de que alguma coleção de objetos pudesse corresponder a tal ideia. O conjunto $\mathbb{N}$, por outro lado, é um exemplo de conjunto potencialmente infinito, pois sempre se pode somar uma unidade a cada um de seus elementos, obtendo-se outro número natural.

No século XVII, chamou a atenção de Galileu Galilei (1564-1642), a seguinte correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ e $P = \{2, 4, 6, ...\}$: $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, ... que associa a cada elemento de $\mathbb{N}^*$ um (e apenas um) elemento de P. (Essa correspondência é a função bijetora $f : \mathbb{N}^* \to P$ assim definida: $f(n) = 2n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}^*$.) Mas como se é uma parte própria de $\mathbb{N}^*$? Ou seja, $P \not\subset \mathbb{N}^*$. Esse aparente paradoxo (que entrou para a história como *paradoxo de Galileu*) e a resistência à ideia de infinito atual em sua época devem ter feito Galileu deixar de lado essas cogitações.

Aliás, a ideia de infinito atual, por ter conotações de ordem religiosa, não era aceita também por certos teólogos (São Tomás de Aquino, por exemplo) que viam em Deus a única natureza absolutamente infinita. E isso deve ter contribuído para que sua adoção fosse retardada em Matemática.

Curiosamente, quem tirou a Matemática dessa camisa de força foi um homem de profunda fé religiosa, Georg Cantor (1845-1918). Cantor nasceu na Rússia, na cidade de São Petersburgo, mas aos 11 anos mudou-se com sua família para a Alemanha, onde se fixou. Em 1862 iniciou o curso de Engenharia em Zurique mas, depois de um semestre, deixou-o para fazer Matemática em Berlim, em cuja universidade obteve o grau de doutor no ano de 1867 com uma tese sobre teoria dos números. Dois anos depois foi admitido na Universidade de Halle, onde transcorreria sua carreira acadêmica.

Em suas pesquisas acadêmicas chamou a atenção do inquieto espírito de Cantor a natureza dos conjuntos infinitos. E foi da exploração desse assunto, com muita ousadia, que nasceu a Teoria dos Conjuntos como capítulo autônomo da Matemática.

Muito importante para a criação, por Cantor, da Teoria dos Conjuntos foi a seguinte definição de conjunto infinito introduzida em 1872 pelo matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916), seu grande amigo: "Um conjunto se diz *infinito* se é possível estabelecer uma correspondência entre ele e uma de suas partes próprias". Por exemplo, $\mathbb{N}^*$ é infinito devido à correspondência biunívoca exibida no primeiro parágrafo. Ou seja, aquilo que para Galileu pareceu ser um paradoxo transformou-se numa definição basilar da Teoria dos Conjuntos.

O grande mérito de Cantor foi perceber, a partir daí, a existência de conjuntos infinitos de espécies diferentes, numa escala de grandeza. Se dois conjuntos, como $\mathbb{N}^*$ e P, podem ser colocados em correspondência biunívoca, diz-se que ambos têm mesma **potência**. E foi através dessas potências que Cantor hierarquizou o infinito. Na primeira categoria da escala do infinito estão todos os conjuntos com a mesma potência de $\mathbb{N}^*$, entre os quais estão P, $\mathbb{Z}$ e, surpreendentemente, o próprio $\mathbb{Q}$. Estes são os conjuntos **enumeráveis**. A sequência a seguir, em que os números são ordenados pela sua **altura** (= numerador + + denominador), dá uma ideia do porquê de $\mathbb{Q}_+^*$ ser também enumerável:

PHOTO RESEACHERS/NEW YORK PUBLIC LIBRARY PICTURE COLLECTION/DIOMEDIA

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).

$$1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \ldots$$

Cantor mostrou que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ têm a mesma potência e que esta é superior à dos enumeráveis. E mostrou ainda que a escala do infinito não tem limites: sempre há potências maiores e maiores.

Certos resultados obtidos por Cantor surpreenderam a ele mesmo. Sob esse ponto de vista é possível entender o porquê das duras críticas que recebeu de importantes matemáticos de seu tempo. Mas, para o progresso da Matemática, prevaleceram opiniões como a de Hilbert: "Do paraíso criado por Cantor ninguém nos tirará".

Conjuntos numéricos

I. Conjunto dos números naturais

41. Chama-se **conjunto dos números naturais** — símbolo $\mathbb{N}$ — o conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, ...

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Nesse conjunto são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] associativa da adição
$(a + b) + c = a + (b + c)$
para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

[A.2] comutativa da adição
$a + b = b + a$
para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

[A.3] elemento neutro da adição
$a + 0 = a$
para todo $a \in \mathbb{N}$.

[M.1] associativa da multiplicação
$(ab)c = a(bc)$
para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

[M.2] comutativa da multiplicação
$ab = ba$
para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

[M.3] elemento neutro da multiplicação
$a \cdot 1 = a$
para todo $a \in \mathbb{N}$.

[D] distributiva da multiplicação relativamente à adição
$a(b + c) = ab + ac$
para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Veremos que os próximos conjuntos numéricos a serem apresentados são ampliações de $\mathbb{N}$, isto é, contêm $\mathbb{N}$, têm uma adição e uma multiplicação com as propriedades formais já apresentadas e outras mais, que constituem justamente o motivo determinante da ampliação.

Assim, dado um natural $a \neq 0$, o simétrico de *a* não existe em $\mathbb{N}$: $-a \notin \mathbb{N}$. O resultado disso é que o símbolo $a - b$ não tem significado em $\mathbb{N}$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$, isto é, em $\mathbb{N}$ a subtração não é uma operação. Venceremos essa dificuldade introduzindo um novo conjunto numérico.

EXERCÍCIOS

62. Seja H o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant 40$, *n* múltiplo de 2, *n* não múltiplo de $3\}$. Qual é o número de elementos de H?

63. Um subconjunto X de números naturais contém 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. Qual é o número de elementos de X?

64. Sendo $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in B\}$, qual é a condição sobre B para que *n* seja um número natural ímpar?

II. Conjunto dos números inteiros

42. Chama-se **conjunto dos números inteiros** — símbolo $\mathbb{Z}$ — o seguinte conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

No conjunto $\mathbb{Z}$ distinguimos três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$$

(chamado conjunto dos inteiros não negativos);

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não positivos);

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não nulos).

43. Operações em $\mathbb{Z}$

No conjunto $\mathbb{Z}$ são definidas também as operações de adição e multiplicação que apresentam, além de **[A.1]**, **[A.2]**, **[A.3]**, **[M.1]**, **[M.2]**, **[M.3]** e **[D]**, a propriedade:

[A.4] simétrico ou oposto para a adição

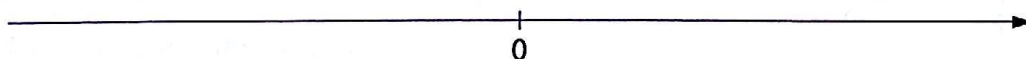
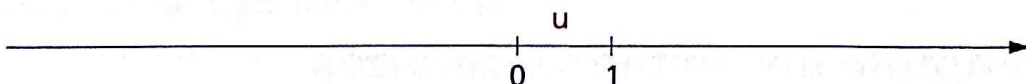
Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

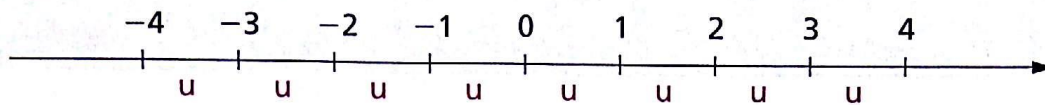
$$a + (-a) = 0.$$

Devido à propriedade **[A.4]**, podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que $a - b = a + (-b)$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

44. Os números inteiros e a reta

Os números inteiros podem ser representados sobre uma reta orientada por meio do seguinte procedimento:

1º) sobre a reta estabelecemos um sentido positivo e um ponto 0 (origem), que representa o inteiro 0 (zero):

2º) a partir de 0, no sentido positivo, marcamos um segmento unitário $u \neq 0$ cuja extremidade passará a representar o inteiro 1:

3º) para cada inteiro positivo *n*, a partir de 0, marcamos um segmento de medida **nu** no sentido positivo cuja extremidade representará *n* e marcamos um segmento de medida **nu** no sentido negativo cuja extremidade representará o inteiro $-n$.

O resultado é este:

45. Divisibilidade

Uma importante noção que devemos ter sobre números inteiros é o conceito de divisor.

Dizemos que o inteiro a é **divisor** do inteiro b — símbolo $a \mid b$ — quando existe um inteiro c tal que $ca = b$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists\, c \in \mathbb{Z} \mid ca = b)$$

Exemplos:

1º)	$2 \mid 12$	pois	$6 \cdot 2 = 12$
2º)	$3 \mid -18$	pois	$(-6) \cdot 3 = -18$
3º)	$-5 \mid 20$	pois	$(-4) \cdot (-5) = 20$
4º)	$-2 \mid -14$	pois	$7 \cdot (-2) = -14$
5º)	$4 \mid 0$	pois	$0 \cdot 4 = 0$
6º)	$0 \mid 0$	pois	$1 \cdot 0 = 0$

Quando a é divisor de b, dizemos que "b é **divisível** por a" ou "b é **múltiplo** de a".

Para um inteiro a qualquer, indicamos com $D(a)$ o conjunto de seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos:

1º) $D(2) = \{1, -1, 2, -2\}$ $\quad$ $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

2º) $D(-3) = \{1, -1, 3, -3\}$ $\quad$ $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$

3º) $D(0) = \mathbb{Z}$ $\quad$ $M(0) = \{0\}$

Dizemos que um número inteiro p é **primo** quando $p \neq 0, 1$ e -1 e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$.

Exemplos:

2, −2, 3, −3, 5, −5, 7 e −7 são primos.

EXERCÍCIOS

65. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $0 \in \mathbb{N}$
b) $(2 - 3) \in \mathbb{N}$
c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$
e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \varnothing$
f) $(-3)^2 \in \mathbb{Z}_-$
g) $(-4) \cdot (-5) \in \mathbb{Z}_+$
h) $0 \in \mathbb{Z}_-$
i) $(5 - 11) \in \mathbb{Z}$

66. Descreva os seguintes conjuntos: D(6), D(−18), D(−24) ∩ D(16), M(4), M(10) e M(−9) ∩ M(6).

67. Quais dos seguintes elementos de $\mathbb{Z}$ não são primos: 12, −13, 0, 5, 31, −1, 2, −4, 1, 49 e 53?

68. Sendo *a* e *b* dois números inteiros, responda:

a) D(a) e D(b) podem ser disjuntos?
b) Que nome se dá a um inteiro *m* tal que D(a) ∩ D(b) = D(m)?
c) Quando D(a) ∩ D(b) = {1, −1}, qual é a relação existente entre *a* e *b*?
d) Em que caso ocorre M(a) ⊂ M(b)?
e) Em que caso ocorre M(a) ∩ M(b) = M(ab)?
f) Que nome se dá a um inteiro *n* tal que M(a) ∩ M(b) = M(n)?

69. Determine os seguintes números inteiros:

a) mdc (2, 3)
b) mdc (−4, 6)
c) mdc (−6, −14)
d) mmc (2, 3)
e) mmc (−4, 6)
f) mmc (−6, −14)

III. Conjunto dos números racionais

Dado um número inteiro $q \neq 1$ e -1, o inverso de *q* não existe em $\mathbb{Z}$: $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Por isso não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de divisão, dando significado ao símbolo $\frac{p}{q}$. Vamos superar essa dificuldade introduzindo os números racionais.

46. Chama-se **conjunto dos números racionais** — símbolo $\mathbb{Q}$ — o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

1ª) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

2ª) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

3ª) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

No conjunto dos racionais destacamos os subconjuntos:

$\mathbb{Q}_+$ (conjunto dos racionais não negativos);
$\mathbb{Q}_-$ (conjunto dos racionais não positivos);
$\mathbb{Q}^*$ (conjunto dos racionais não nulos).

Na fração $\frac{a}{b}$, *a* é o **numerador** e *b* o **denominador**. Se *a* e *b* são primos entre si, isto é, se mdc(a, b) = 1, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**. Assim, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis, mas $\frac{6}{10}$ não é.

Consideremos o conjunto $\mathbb{Q}'$ formado pelos números racionais com denominador unitário: $\mathbb{Q}' = \left\{\frac{x}{1} \mid x \in \mathbb{Z}\right\}$. Temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b$$

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a + b}{1} \Leftrightarrow a + b = a + b$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} \Leftrightarrow a \cdot b = a \cdot b$$

portanto, os racionais com denominador igual a 1 comportam-se para a igualdade, a adição e a multiplicação como se fossem números inteiros. Assim, fazendo o racional $\frac{x}{1}$ coincidir com o inteiro *x*, decorre que:

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Z}, \text{ logo, } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

47. Operações em $\mathbb{Q}$

Pode-se verificar que a adição e a multiplicação de racionais apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

[A.2] $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

[A.3] $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

[A.4] $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$

[M.1] $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$

[M.2] $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

[M.3] $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

[D] $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

em que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ são racionais quaisquer; portanto, são válidas as mesmas propriedades formais vistas para os números inteiros. Além dessas, temos também a seguinte:

[M.4] simétrico ou inverso para a multiplicação

para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$, existe

$\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Devido à propriedade **[M.4]**, podemos definir em $\mathbb{Q}^*$ a operação de divisão, estabelecendo que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos.

48. Representação decimal

Notemos que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Passa-se um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma de número decimal dividindo o inteiro *a* pelo inteiro *b*. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1º) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, é uma **decimal exata**.

Exemplos:

$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{20} = 0,05 \qquad \frac{27}{1000} = 0,027$

2º) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma **dízima periódica.**

Exemplos:

$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$ (período 3)

$\frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,\overline{285714}$ (período 285714)

$\frac{11}{6} = 1,8333... = 1,8\overline{3}$ (período 3)

Podemos notar também que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$ e, portanto, representa um número racional.

Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

Exemplos:

$0,37 = \frac{37}{100} \qquad 2,631 = \frac{2631}{1000} \qquad 63,4598 = \frac{634598}{10000}$

Quando a decimal é uma dízima periódica, devemos procurar sua **geratriz**. Damos, a seguir, três exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo 1: 0,777...

$$\left.\begin{aligned} x &= 0,777... \\ 10x &= 7,777... \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10x - x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

então: $0,777... = \frac{7}{9}$.

Exemplo 2: 6,4343...

$$\left.\begin{aligned} x &= 6,434343... \\ 100x &= 643,434343... \end{aligned}\right\} \Rightarrow 100x - x = 637 \Rightarrow x = \frac{637}{99}$$

então: $6,434343... = \frac{637}{99}$.

Exemplo 3: 2,57919191...

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 2{,}579191\ldots \\ 100x = & 257{,}919191\ldots \\ 10\,000x = & 25\,791{,}919191\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 10\,000x - 100x = 25\,534 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{25\,534}{9\,900}$$

então: $2{,}57919191\ldots = \dfrac{25\,534}{9\,900}$.

EXERCÍCIOS

70. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) $0 \in \mathbb{Q}$

d) $517 \in \mathbb{Q}$

e) $0{,}474747\ldots \in \mathbb{Q}$

f) $\left\{\dfrac{4}{7}, \dfrac{11}{3}\right\} \subset \mathbb{Q}$

g) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

h) $\dfrac{2}{7} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

i) $\dfrac{14}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

j) $\dfrac{21}{14}$ é irredutível

k) $\dfrac{121}{147} < \dfrac{131}{150}$

l) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$

71. Coloque na forma de uma fração irredutível os seguintes números racionais: 0,4; 0,444...; 0,32; 0,323232...; 54,2; 5,423423423... .

72. Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais: $\dfrac{15}{16}, \dfrac{11}{12}, \dfrac{18}{19}, 1, \dfrac{47}{48}$ e $\dfrac{2}{3}$.

73. Mostre que, se r_1 e r_2 são racionais e $r_1 < r_2$, então existe um racional r tal que $r_1 < r < r_2$.

74. Represente sobre uma reta orientada os seguintes números racionais:

$-2, -\dfrac{3}{2}, -1, -\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{4}{3}, 2, \dfrac{7}{3}$ e $\dfrac{6}{2}$.

75. Calcule o valor de:

a) $\dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}7 - 4 \cdot 0{,}01}{0{,}5 \cdot 0{,}2}$

b) $0{,}999\ldots + \dfrac{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{15}}$

76. Na minha calculadora, a tecla da divisão não funciona. Nessa situação, para dividir um número por 40, usando a calculadora, eu devo multiplicar 40 por qual número?

77. Considere o número $\alpha = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots$.
Se ele for racional, coloque-o na forma decimal e na forma de fração irredutível.

78. Suponha que um país A tem uma renda *per capita* anual de 20 000 dólares e uma população de 50 milhões de habitantes. Um outro país B tem uma renda *per capita* de 10 000 dólares e uma população de 20 milhões. Se os dois países se fundirem para formar um novo país, qual será o valor da nova renda *per capita*?

79. A pressão P e o volume V de um gás perfeito mantido a uma temperatura constante satisfazem a Lei de Boyle PV = constante. Se aumentarmos a pressão em 25%, em quantos por cento diminuirá o volume do gás?

IV. Conjunto dos números reais

49. Números irracionais

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral decimal 0,1010010001... (em que o número de algarismos 0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é não periódico. Ele representa um número *não* racional. Ele representa um **número irracional.**

Outros exemplos de números irracionais:

1,234567891011
6,202002000...
34,56789101112...

50. Chama-se **conjunto dos números reais** — símbolo $\mathbb{R}$ — aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (que são números irracionais).

Dessa forma, todo número racional é número real, ou seja:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Além dos racionais, estão em $\mathbb{R}$ números irracionais como:

$\sqrt{2} = 1{,}4142136...$

$\pi = 3{,}1415926...$

Se quisermos outros números irracionais, poderemos obtê-los, por exemplo, por meio da expressão $\sqrt{p}$, em que p é primo e positivo. São irracionais: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc.

Outro recurso para construção de irracionais é usar o fato de que, se α é irracional e r é racional não nulo, então: $\alpha + r$, $\alpha \cdot r$, $\dfrac{\alpha}{r}$ e $\dfrac{r}{\alpha}$ são todos irracionais.

Exemplos:

$\sqrt{2} + 1$, $3\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ são irracionais.

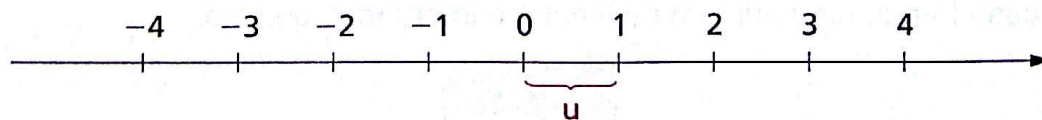
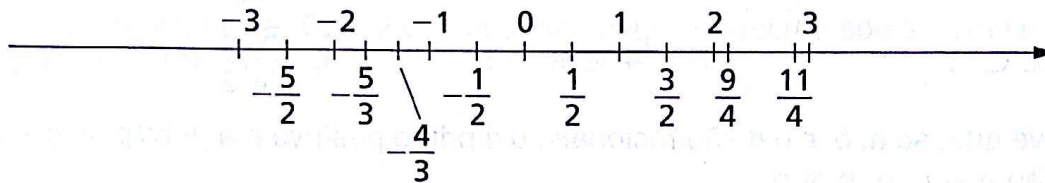
Além de $\mathbb{Q}$, destacamos em $\mathbb{R}$ três outros subconjuntos:

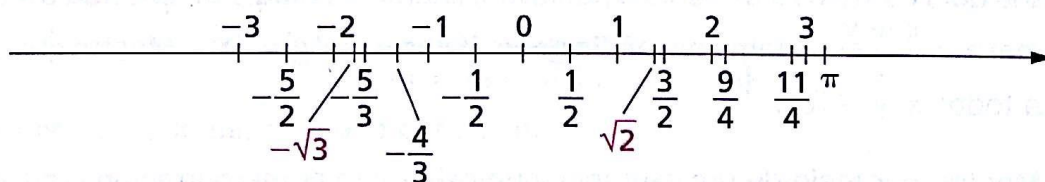
$\mathbb{R}_+$ (conjunto dos reais não negativos);
$\mathbb{R}_-$ (conjunto dos reais não positivos);
$\mathbb{R}^*$ (conjunto dos reais não nulos).

51. Operações em $\mathbb{R}$

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ gozam das mesmas propriedades vistas para o conjunto $\mathbb{Q}$. Em $\mathbb{R}$ é também definida a operação de subtração e em $\mathbb{R}^*$ é definida a divisão.

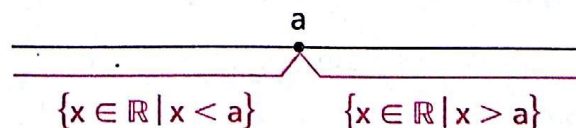
52. Os números reais e a reta

Já vimos que os números inteiros podem ser representados por pontos de uma reta orientada:

Analogamente, os números racionais não inteiros também podem. Se queremos, por exemplo, representar o número $\frac{1}{2}$ sobre a reta, marcamos a partir de 0 um segmento de medida $\frac{1}{2}$ u no sentido positivo. A extremidade desse segmento representa $\frac{1}{2}$. Na figura abaixo representamos sobre a reta vários números racionais.

Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, isto é, há pontos da reta que não representam nenhum racional. Por exemplo, entre os pontos 1,41 e 1,42 fica um ponto que representa $\sqrt{2} = 1{,}414215...$ (irracional).

Quando representamos também sobre a reta os números irracionais, cada ponto da reta passa a representar necessariamente um número racional ou irracional (portanto, real), isto é, os reais preenchem completamente a reta.

Essa reta, que representa $\mathbb{R}$, é chamada **reta real** ou **reta numérica**.

Na reta real, os números estão **ordenados.** Um número *a* é menor que qualquer número *x* colocado à sua direita e maior que qualquer número *x* à sua esquerda.

a

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

EXERCÍCIOS

80. Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $3 \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

81. Prove que, se *a*, *b*, *c* e *d* são racionais, *p* é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

Solução

$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow (b - d)\sqrt{p} = c - a$

Como $c - a$ é racional, a última igualdade só subsiste quando $(b - d)\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, isto é, se $b - d = 0$. Neste caso, $c - a = 0$, provando a tese.

82. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

83. Mostre que existem *a* e *b* racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

84. Dados dois números *x* e *y* reais e positivos, chama-se **média aritmética** de *x* com *y* o real $a = \frac{x + y}{2}$ e chama-se **média geométrica** o real $g = \sqrt{xy}$. Mostre que $a \geqslant g$ para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$.

85. a) Mostre, por meio de um exemplo, que existe um número irracional *a* tal que a^4 e a^6 são números racionais.

b) Mostre que, se a^7 e a^{12} são racionais, então *a* é racional.

86. Prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solução

Admitamos que a fração irredutível $\frac{a}{b}$ seja tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Desse modo temos:

$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2$ é par $\Rightarrow$ a é par

Fazendo $a = 2m$, com $m \in \mathbb{Z}$, temos:
$a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2m)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2m^2 \Rightarrow b^2$ é par $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ b é par e isso é absurdo, pois mdc (a, b) = 1.

87. Prove que, dado um número racional $\frac{a}{b}$ e um número natural $n \geq 2$, nem sempre $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é racional.

88. Dentre os reais $-1, 0, 1, 2$ e 3, qual não pode ser escrito sob a forma $r = \frac{x + 1}{x}$, *x* real?

V. Intervalos

53. Dados dois números reais *a* e *b*, com $a < b$, definimos:

a) **intervalo aberto** de extremos *a* e *b* é o conjunto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

que também pode ser indicado por a — b.

b) **intervalo fechado** de extremos *a* e *b* é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

que também pode ser indicado por a ⊢⊣ b.

c) **intervalo fechado à esquerda** (ou aberto à direita) de extremos *a* e *b* é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

que também pode ser indicado por a ⊢ b.

d) **intervalo fechado à direita** (ou aberto à esquerda) de extremos *a* e *b* é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

que também pode ser indicado por a ⊣ b.

Os números reais *a* e *b* são denominados, respectivamente, **extremo inferior** e **extremo superior** do intervalo.

Exemplos:

1º) $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto.

2º) $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ é intervalo fechado.

3º) $\left[\frac{2}{5}, 7\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < 7\right\}$ é intervalo fechado à esquerda.

4º) $\left]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leq \sqrt{2}\right\}$ é intervalo fechado à direita.

Também consideramos intervalos lineares os "intervalos infinitos" assim definidos:

a) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

que também podemos indicar por $(-\infty, a[$ ou $-\infty$ — a.

b) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

que também podemos indicar por $(-\infty, a]$ ou $-\infty \dashv a$.

c) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

que também podemos indicar por $]a, +\infty)$ ou a — $+\infty$.

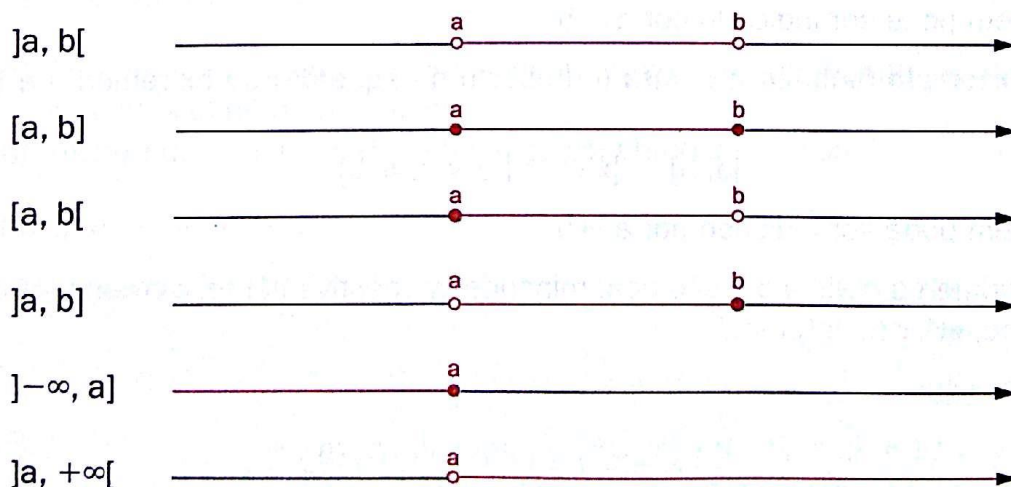
d) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

que também podemos indicar por $[a, +\infty)$ ou $a \vdash +\infty$.

e) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

que também podemos indicar por $(-\infty, +\infty)$ ou $-\infty$ — $+\infty$.

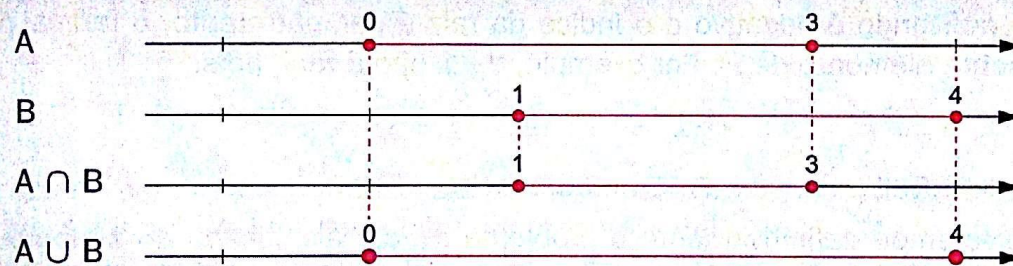
54. Representação gráfica

Os intervalos têm uma representação geométrica sobre a reta real como a que segue:

EXERCÍCIOS

89. Represente sobre a reta real cada um dos seguintes conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 2\}$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

90. Descreva, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos: $[-1, 3]$, $[0, 2[$, $]-3, 4[$, $]-\infty, 5[$ e $[1, +\infty[$.

91. Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = [0, 3]$ e $B = [1, 4]$.

Solução

então $A \cap B = [1, 3]$ e $A \cup B = [0, 4]$.

92. Descreva os seguintes conjuntos:

a) $[0, 2] \cap [1, 3]$

b) $[0, 2] \cap]1, 3[$

c) $\left]-1, \frac{2}{5}\right[\cap \left]0, \frac{4}{3}\right[$

d) $]-\infty, 2] \cap [0, +\infty[$

e) $[-1, +\infty[\cap \left[-\frac{9}{2}, 2\right[$

f) $[1, 2] \cap [0, 3] \cap [-1, 4]$

93. Determine os seguintes conjuntos:

a) $[-1, 3] \cup [0, 4]$

b) $]-2, 1] \cup]0, 5[$

c) $[-1, 3] \cup [3, 5]$

d) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right]$

94. Sendo $A = [0, 5[$ e $B =]1, 3[$, determine $\complement_A^B$.

95. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$, calcule $A \cup B$.

96. Sejam $A = (-\infty; 2]$ e $B = [0; +\infty)$ intervalos de números reais. Determine $A \cap B$.

97. Determine a interseção dos conjuntos:
$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$; $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$ e $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$.

VI. Conjunto dos números complexos

55. Vimos que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_+$ qualquer que seja o real *a* não negativo. Assim, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{\frac{17}{2}}$ e $\sqrt[6]{\pi}$ são números reais.

Desde que o índice da raiz seja ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}$, em que $a \in \mathbb{R}_+$, também representam números reais. É o caso, por exemplo, de $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[5]{-32}$ e $\sqrt[7]{-3}$.

Se o radicando é negativo e o índice da raiz é par, entretanto, o radical $\sqrt[n]{-a}$ não representa elemento de $\mathbb{R}$. Por exemplo, $\sqrt{-1}$ não é real, pois:

$$\sqrt{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2$$

e isso é impossível, pois, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geqslant 0$.

Resolveremos definitivamente o problema de dar significado ao símbolo $\sqrt[n]{a}$, para todo número *a*, introduzindo no volume 6 desta coleção o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, do qual $\mathbb{R}$ é um subconjunto.

VII. Resumo

Os conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela figura ao lado.

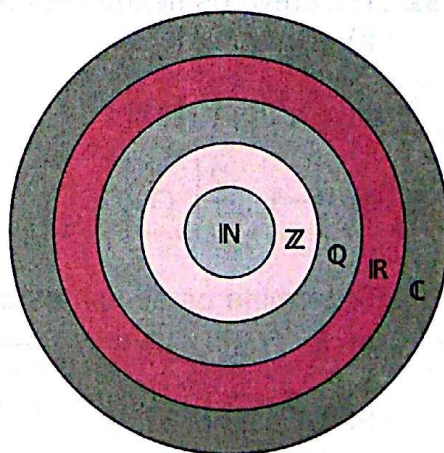
Observemos que

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notemos também que:

$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ = conjunto dos números inteiros negativos;

$\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ = conjunto dos números racionais não inteiros;

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = conjunto dos números reais irracionais.

Apêndice

Princípio da indução finita

56. Indução vulgar

A indução vulgar (generalização de propriedade após verificação de que a propriedade é válida em alguns casos particulares) pode conduzir a sérios enganos na Matemática. Vejamos dois exemplos:

1º) Consideremos a relação $y = 2^{2^n} + 1$ definida para $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$n = 0 \Rightarrow y = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$

$n = 1 \Rightarrow y = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$n = 2 \Rightarrow y = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$n = 3 \Rightarrow y = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

$n = 4 \Rightarrow y = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$

Os números *y* encontrados são números primos. Fermat (1601-1665) acreditou que a fórmula acima daria números primos, qualquer que fosse o valor inteiro positivo atribuído a *n*. Esta indução é falsa, pois Euler (1707-1783) mostrou que para $n = 5$ resulta $y = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$, isto é, resulta um número divisível por 641 e que, portanto, não é primo.

2º) Dada a relação $y = -\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{3} + 3$, definida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$n = 1 \Rightarrow y = -\frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{7 \cdot 1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9 - 14 + 18}{6} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow y = -\frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{7 \cdot 2}{3} + 3 = \frac{-8 + 36 - 28 + 18}{6} = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow y = -\frac{3^3}{6} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} - \frac{7 \cdot 3}{3} + 3 = \frac{-27 + 81 - 42 + 18}{6} = 5$$

$$n = 4 \Rightarrow y = -\frac{4^3}{6} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{7 \cdot 4}{3} + 3 = \frac{-64 + 144 - 56 + 18}{6} = 7$$

Poderíamos tirar a conclusão precipitada: "*y* é número primo, $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$". Essa indução também é falsa, pois:

$$n = 5 \Rightarrow y = -\frac{5^3}{6} + \frac{3 \cdot 5^2}{2} - \frac{7 \cdot 5}{3} + 3 = \frac{-125 + 225 - 70 + 18}{6} = 8.$$

57. É necessário, portanto, dispor de um método com base lógica que permita decidir sobre a validade ou não de uma indução vulgar.

Consideremos, por exemplo, a igualdade:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

que expressa a propriedade: "a soma dos *n* primeiros números ímpares positivos é n^2".

Vamos verificar se ela é verdadeira:

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$ (V)
$n = 2 \Rightarrow 1 + 3 = 4 = 2^2$ (V)
$n = 3 \Rightarrow 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ (V)
...
$n = 10 \Rightarrow 1 + 3 + 5 ... + 19 = 100 = 10^2$ (V)

Mesmo que continuemos o trabalho fazendo a verificação até n = 1000000, não estará provado que a fórmula vale para todo *n* natural, pois poderá existir um n > 1000000 em que a fórmula falha.

58. Princípio da indução finita

Para provarmos que a relação é válida para todo n $\in \mathbb{N}^*$ empregamos o **princípio da indução finita** (P.I.F.) cujo enunciado é o seguinte:

> Uma proposição P(n), aplicável aos números naturais *n*, é verdadeira para todo n $\in \mathbb{N}$, n $\geq n_0$ quando:
>
> 1º) $P(n_0)$ é verdadeira, isto é, a propriedade é válida para $n = n_0$, e
>
> 2º) Se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$ e P(k) é verdadeira, então P(k + 1) também é verdeira.

Provemos, por exemplo, que:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1º) Verifiquemos que P(1) é verdadeira:
$n = 1 \Rightarrow 1 = 1^2$

2º) Admitamos que P(k), com $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \quad \text{(hipótese da indução)}$$

e provemos que decorre a validade de P(k + 1), isto é:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2.$$

Temos:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)} + (2k + 1) = \underbrace{k^2} + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

EXERCÍCIOS

Demonstre, usando o princípio da indução finita.

98. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

99. $2 + 5 + 8 + \ldots + \ldots + (2 + 3n) = \dfrac{(n + 1)(4 + 3n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$

100. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

101. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

102. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n + 1)}{2}\right]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

103. $8 \mid (3^{2n} - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Solução

1º) P(1) é verdadeira, pois $8 \mid (3^2 - 1)$.

2º) Admitamos que P(k), $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$8 \mid (3^{2k} - 1)$ (hipótese da indução)

e provemos que $8 \mid (3^{2(k + 1)} - 1)$:

$$3^{2(k + 1)} - 1 = 3^{2k + 2} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k} \cdot (8 + 1) - 1 =$$
$$= 8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k} - 1)$$

então:

$$\left.\begin{array}{l} 8 \mid 8 \cdot 3^{2k} \\ 8 \mid (3^{2k} - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 8 \mid (8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} - 1) \Rightarrow 8 \mid (3^{2(k + 1)} - 1).$$

104. $6 \mid n(n + 1)(n + 2), \forall n \in \mathbb{N}$.

105. $2 \mid (n^2 + n), \forall n \in \mathbb{N}$.

106. $3 \mid (n^3 + 2n), \forall n \in \mathbb{N}$.

107. $(1 + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

108. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

109. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

110. $2n \geqslant n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Solução

1º) $P(1)$ é verdadeira, pois $2 \cdot 1 \geqslant 1 + 1$.

2º) Admitamos que $P(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, seja verdadeira:

$2k \geqslant k + 1$ (hipótese da indução)

e provemos que $2(k + 1) \geqslant (k + 1) + 1$.

Temos:

$2(k + 1) = 2k + 2 \geqslant (k + 1) + 2 > (k + 1) + 1$.

111. $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$.

112. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 > \frac{n^4}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

113. $(1 + a)^n \geqslant 1 + na, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}, a \geqslant -1$.

114. O número de diagonais de um polígono convexo de *n* lados é $d_n = \frac{n(n - 3)}{2}$.

Solução

1º) $P(3)$ é verdadeira, pois:

$$n = 3 \Rightarrow d_3 = \frac{3(3 - 3)}{2} = 0$$

e isso é verdade porque um triângulo não tem diagonais.

2º) Supondo válida a fórmula para um polígono de *k* lados ($k \geqslant 3$):

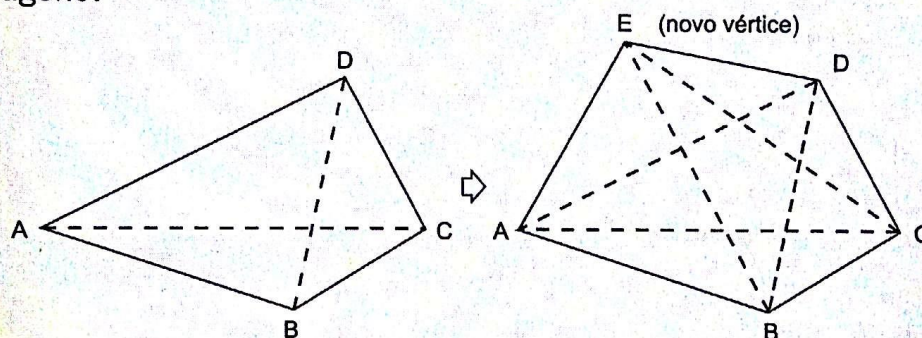
$$d_k = \frac{k(k-3)}{2} \quad \text{(hipótese da indução)}$$

provemos que ela vale para um polígono de k + 1 lados:

$$d_{k+1} = \frac{(k+1)\,[(k+1)-3]}{2} = \frac{(k+1)\,(k-2)}{2}$$

Quando passamos de um polígono com *k* vértices para um de k + 1 vértices, acrescentando mais um vértice, ocorre o seguinte:

1. todas as diagonais do primeiro polígono continuam sendo diagonais do segundo;
2. um lado do primeiro se transforma em diagonal do segundo;
3. no segundo há k − 2 novas diagonais (as que partem do novo vértice).

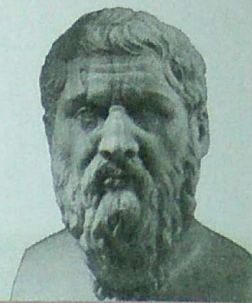
Vejamos, por exemplo, a passagem de um quadrilátero para um pentágono:

$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais → $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ continuam diagonais
$\overline{AD}$ é lado → $\overline{AD}$ se transforma em diagonal
$\overline{EB}$ e $\overline{EC}$ são diagonais

Então:

$$d_{k+1} = d_k + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

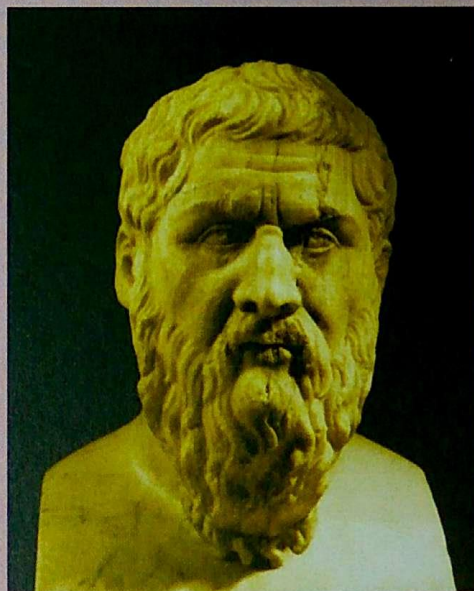
115. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados é $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

116. Se A é um conjunto finito com *n* elementos, então $\mathcal{P}(A)$, conjunto das partes de A, tem 2^n elementos.

LEITURA

Eudóxio e os incomensuráveis

Hygino H. Domingues

A descoberta no séc. V a.C. da existência de grandezas incomensuráveis (como a diagonal e o lado de um quadrado) abalou a matemática grega, dado o peso que nela tinha a escola pitagórica. Afinal esta escola apoiava-se na convicção de que o universo numérico não ultrapassava o que hoje chamamos de conjunto dos números racionais estritamente positivos. Ademais, o espírito do povo grego era muito diferente do babilônico, por exemplo, que aceitava as aproximações de números irracionais acaso surgidos em algum problema sem questionamentos de ordem teórica. Os pitagóricos, por não encontrarem uma saída matemática satisfatória para o impasse, limitaram-se sempre, no caso de razões, àquelas entre grandezas comensuráveis.

A primeira teoria das proporções, envolvendo grandezas incomensuráveis, é obra de Eudóxio (aproximadamente 408 a 355 a.C.). Natural de Cnido, colônia grega situada na Ásia Menor, Eudóxio é considerado, depois de Arquimedes, o maior matemático da Antiguidade. Muito jovem, deixou sua cidade natal para estudar geometria com o pitagórico Arquitas. Depois seguiu para Atenas, onde estudou filosofia na Academia de Platão. Muito pobre, optou por morar na cidade de Pireu, a duas milhas (aproximadamente 3 quilômetros) de Atenas, onde a pensão era mais barata, fazendo a pé, todos os dias, o caminho de ida e volta à Academia. Esteve também meio ano no Egito estudando, e depois fundou, em Císico, uma escola que teve muito êxito. Com cerca de 40 anos de idade voltou em visita a Atenas, acompanhado de alguns alunos, sendo recepcionado por Platão com um banquete. Retornou por fim a Cnido para lecionar e participar da vida da cidade, terminando seus dias cercado de prestígio.

*Eudóxio foi aluno da **Academia**, escola de filosofia criada por Platão (foto). À entrada da Academia lia-se a inscrição: "Que aqui não adentrem aqueles que não conhecem geometria".*

A solução encontrada por Eudóxio para o problema da incomensurabilidade, embora brilhante, tinha como sério inconveniente o fato de ser meramente geométrica, o que contribuiu fortemente para que nos dois milênios seguintes a geometria se tornasse praticamente a única base de rigor da Matemática.

Eudóxio introduziu a noção de **grandeza** para representar genericamente coisas como segmentos, ângulos, áreas, volumes e tempo, por exemplo, e a ideia de **múltiplo** de uma grandeza segundo um número natural não nulo. Assim, se a, b, c, d são grandezas (a e b da mesma espécie; c e d também da mesma espécie), o conceito de proporção segundo Eudóxio (e que irá figurar nos *Elementos* de Euclides como definição 5, livro V) é o seguinte:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, para quaisquer naturais não nulos m e n: $(ma = nb \Rightarrow mc = nd)$ ou $(ma > nb \Rightarrow mc > nd)$ ou $(ma < nb \Rightarrow mc < nd)$.

Com isso, no fundo, o conjunto dos números racionais maiores que zero fica dividido em duas classes, aquela dos quocientes $\frac{m}{n}$ tais que $ma \leqslant nb$ e a dos quocientes $\frac{m}{n}$ para os quais $ma > nb$. Escapou aos gregos destacar o ente definido por essas classes, ou seja, o número real α que é a medida de b em relação a a.

Outra criação importante de Eudóxio foi o chamado (atualmente) método de exaustão para determinar áreas e volumes de figuras curvas. Tal método baseia-se, em última instância, num postulado que leva o nome de Arquimedes, mas que, segundo este, é devido a Eudóxio: "Dadas duas grandezas não nulas de mesma espécie, sempre há um múltiplo de uma que supera a outra". Com isso Eudóxio pôde provar, por exemplo, que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados de seus raios e os volumes de duas esferas como os cubos de seus raios.

Resultados como esses, embora notáveis, por não se traduzirem em métodos numéricos, põem em relevo a face negativa da matemática de Eudóxio.

CAPÍTULO IV

Relações

I. Par ordenado

59. Par

Chama-se **par** todo conjunto formado por dois elementos. Assim $\{1, 2\}$, $\{3, -1\}$, $\{a, b\}$ indicam pares. Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{3, -1\} = \{-1, 3\}, \{a, b\} = \{b, a\}$$

Em Matemática existem situações em que há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos. Por exemplo, no sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ e $y = 1$ é solução, ao passo que $x = 1$ e $y = 2$ não é solução. Se representássemos por um conjunto, teríamos: $\{2, 1\}$ seria solução e $\{1, 2\}$ não seria solução. Há uma contradição, pois, sendo $\{2, 1\} = \{1, 2\}$, o mesmo conjunto é e não é solução. Por causa disso dizemos que a solução é o **par ordenado** $(2, 1)$, em que fica subentendido que o primeiro elemento, 2, refere-se à incógnita x e o segundo elemento, 1, refere-se à incógnita y.

60. Par ordenado

Admitiremos a noção de par ordenado como conceito primitivo(*). Para cada elemento *a* e cada elemento *b*, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b), que denominamos par ordenado, de modo que se tenha

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \quad \text{e} \quad b = d$$

II. Representação gráfica

61. Plano cartesiano

Consideremos dois eixos *x* e *y* perpendiculares em O, os quais determinam o plano α.

Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas:

$$x' \,//\, x \quad \text{e} \quad y' \,//\, y$$

Denominemos P_1 a interseção de *x* com *y'* e P_2 a interseção de *y* com *x'*.

Nessas condições definimos:

a) **abscissa** de P é o número real x_P representado por P_1

b) **ordenada** de P é o número real y_P representado por P_2

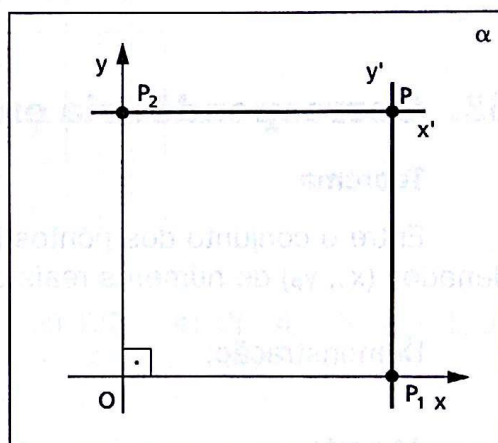
c) **coordenadas** de P são os números reais x_P e y_P, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P) em que x_P é o primeiro termo

d) **eixo das abscissas** é o eixo *x* (ou Ox)

e) **eixo das ordenadas** é o eixo *y* (ou Oy)

f) **sistema de eixos cartesiano ortogonal** (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy

g) **origem** do sistema é o ponto O

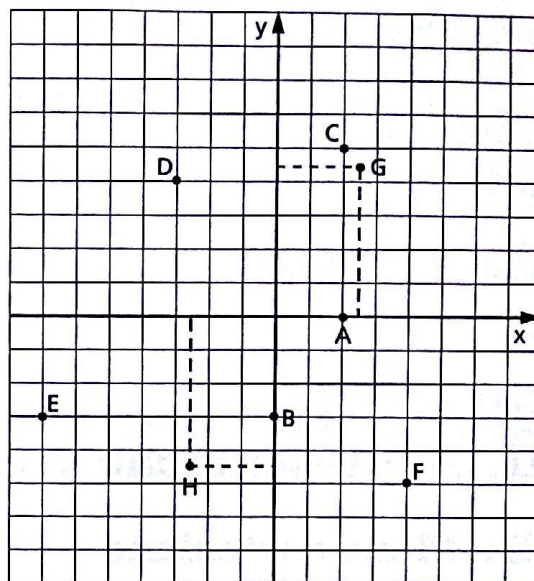
h) **plano cartesiano** é o plano α

(*) Poderíamos definir par ordenado como Kuratowski fez:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

mas isso ficaria fora do nível deste curso.

Exemplo:

Vamos localizar os pontos

A(2, 0), B(0, −3), C(2, 5), D(−3, 4), E(−7, −3), F(4, −5), $G\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e $H\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ no plano cartesiano, lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo, a ordenada do ponto.

62. Correspondência entre pontos e pares ordenados

Teorema

Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P) de números reais existe uma correspondência biunívoca.

Demonstração:

1ª parte

As definições dadas anteriormente indicam que a todo ponto P, $P \in \alpha$, corresponde um único par de pontos (P_1, P_2) sobre os eixos *x* e *y* respectivamente e, portanto, um único par ordenado de números reais (x_P, y_P) tais que x_P e y_P são representados por P_1 e P_2, respectivamente.

Esquema: $P \rightarrow (P_1, P_2) \rightarrow (x_P, y_P)$.

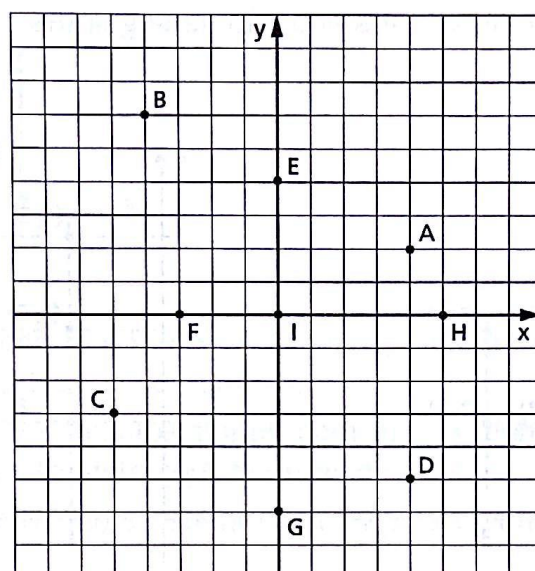
2ª parte

Dado o par ordenado de números reais (x_P, y_P), existem $P_1 \in x$ e $P_2 \in y$ tais que P_1 representa x_P e P_2 representa y_P conforme vimos no item 60.

Se construirmos $x' /\!/ x$ por P_2 e $y' /\!/ y$ por P_1, essas retas vão concorrer em P. Assim, a todo par (x_P, y_P) corresponde um único ponto P, $P \in \alpha$.

Esquema: $(x_P, y_P) \rightarrow (P_1, P_2) \rightarrow P$.

EXERCÍCIOS

117. Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano abaixo.

118. Assinale no plano cartesiano os pontos: A(2, −3), B(0, −4), C(−4, −5), D(−1, 0), E(0, 5), F(5, 4), G(3, 0), H(−3, 2), $I\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

III. Produto cartesiano

63. Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos **produto cartesiano** de A por B o conjunto A × B cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \quad e \quad y \in B\}$$

Lê-se a notação A × B assim: "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

Se A ou B for o conjunto vazio, definiremos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio.

$$A \times \varnothing = \varnothing \qquad \varnothing \times B = \varnothing \qquad \varnothing \times \varnothing = \varnothing$$

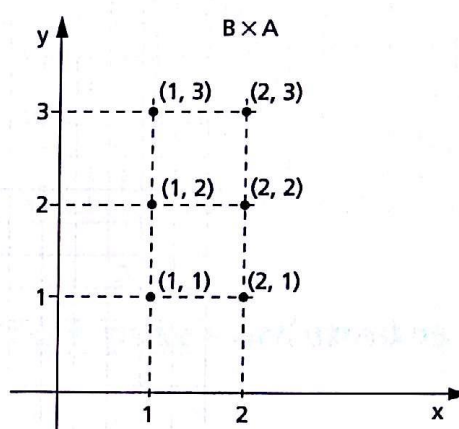
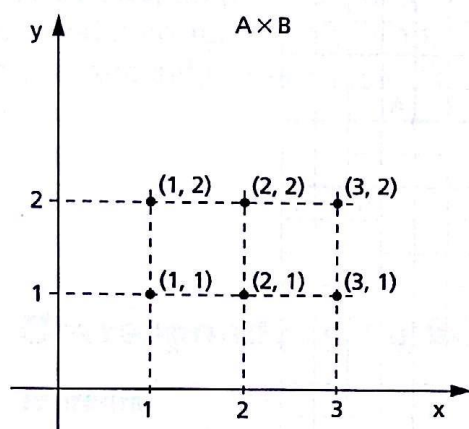
Exemplos:

1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, temos

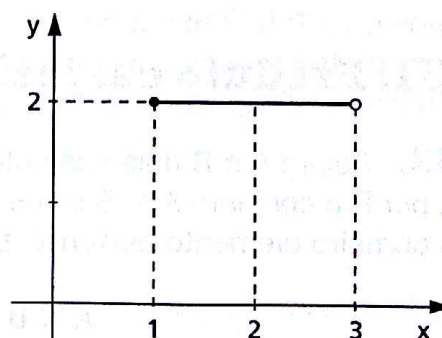
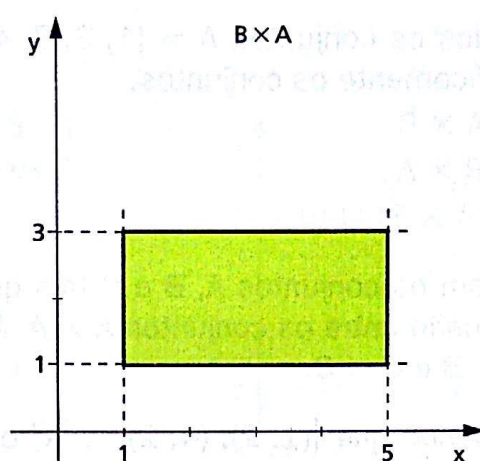
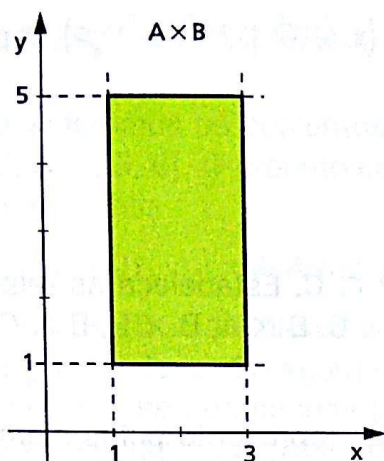
$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

e

$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

e as representações no plano cartesiano são as seguintes:

2º) Se $A = \{2, 3\}$, então o conjunto $A \times A$ (que também pode ser indicado por A^2 e lê-se "A dois") é:

$$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

3º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\}$ e $B = \{2\}$, então temos $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A\}$. A representação gráfica de $A \times B$ dá como resultado o conjunto de pontos do segmento paralelo ao eixo dos *x* da figura ao lado.

4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 5\}$ representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo. Notemos que $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ é representado por um retângulo distinto do anterior.

Observações:

1ª) Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

2ª) Se A e B são conjuntos finitos com *m* e *n* elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.

3ª) Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então $A \times B$ é um conjunto infinito.

EXERCÍCIOS

119. Dados os conjuntos

$A = \{1, 3, 4\}$ $\quad$ $B = \{-2, 1\}$ $\quad$ $C = \{-1, 0, 2\}$

represente pelos elementos e pelo gráfico cartesiano os seguintes produtos:

a) $A \times B$ $\quad$ c) $A \times C$ $\quad$ e) B^2

b) $B \times A$ $\quad$ d) $C \times A$ $\quad$ f) C^2

120. Dados os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1\}$

represente graficamente os seguintes produtos:

a) $A \times B$ $\quad$ c) $B \times C$ $\quad$ e) A^2

b) $A \times C$ $\quad$ d) $C \times B$ $\quad$ f) C^2

121. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, represente graficamente os conjuntos:

a) $A \times B$

b) $B \times A$

c) $(A \times B) \cup (B \times A)$

122. Sejam os conjuntos A, B e C tais que $A \subset B \subset C$. Estabeleça as relações de inclusão entre os conjuntos $A \times A$, $A \times B$, $A \times C$, $B \times A$, $B \times B$, $B \times C$, $C \times A$, $C \times B$ e $C \times C$.

123. Sabendo que $\{(1, 2), (4, 2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, represente pelos elementos o conjunto A^2.

Solução

O número de elementos de A^2 é igual ao quadrado do número de elementos de A; portanto:

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \Rightarrow [n(A)]^2 = 9 \Rightarrow n(A) = 3$$

Se A é um conjunto de 3 elementos, $(1, 2) \in A^2$ e $(4, 2) \in A^2$, concluímos que $A = \{1, 2, 4\}$.

Assim sendo:

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$

124. Se $\{(1, -2), (3, 0)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 16$, então represente A^2 pelos seus elementos.

125. Considerando $A \subset B$, $\{(0, 5), (-1, 2), (2, -1)\} \subset A \times B$ e $n(A \times B) = 12$, represente $A \times B$ pelos seus elementos.

126. Sejam $F = \{1, 2, 3, 4\}$ e $G = \{3, 4, 7\}$. Determine o número de elementos de $F \times G$.

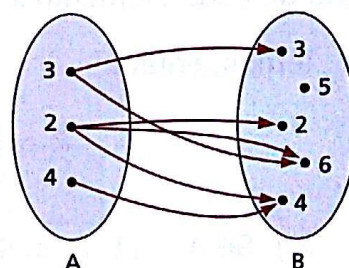
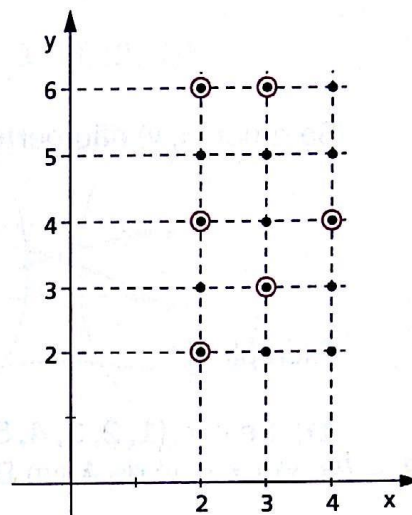
127. Dados os conjuntos $A = \left\{1, \frac{3}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$, represente graficamente $A \times B$.

128. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Sejam ainda os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leqslant 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Qual é o número de elementos do conjunto $D = \{(x, y) \in A \times B \mid y \geqslant x + 4\}$?

IV. Relação binária

64. Consideremos os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {2, 3, 4, 5, 6}. O produto cartesiano de A por B é o conjunto

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

formado por 3 · 5 = 15 elementos representados na figura ao lado. Se agora considerarmos o conjunto de pares ordenados (x, y) de A × B tais que x | y (lê-se: "*x* é divisor de *y*"), teremos $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \mid y\} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$, que é chamado relação entre os elementos de A e de B ou, simplesmente, **relação binária de A em B.**

O conjunto R está contido em A × B e é formado por pares (x, y), em que o elemento *x* de A é "associado" ao elemento *y* de B mediante um certo critério de "relacionamento" ou "correspondência".

Será bastante útil a representação da relação por meio de flechas, como na figura ao lado.

65. Dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação binária de A em B** todo subconjunto R de A × B.

R é relação binária de A em B ⇔ R ⊂ A × B.

Se, eventualmente, os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de A × A é chamado **relação binária em A.**

R é relação binária em A ⇔ R ⊂ A × A.

Utilizaremos as seguintes nomenclaturas já consagradas:

A = conjunto de partida da relação R

B = conjunto de chegada ou contradomínio da relação R

Quando o par (x, y) pertence à relação R, escrevemos xRy (lê-se: "*x* erre *y*").

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow xRy$$

Se o par (x, y) não pertence à relação R, escrevemos $x\not{R}y$ (lê-se "*x* não erre *y*").

$$(x, y) \notin R \Leftrightarrow x\not{R}y$$

Exemplos:

1º) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ de A em B?

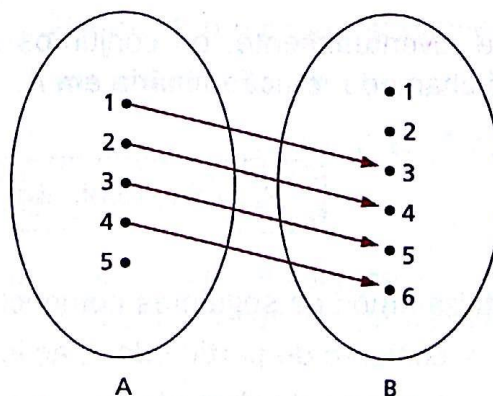
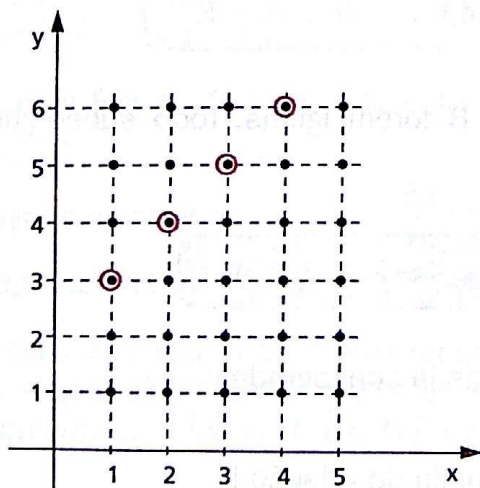
Os elementos de R são todos os pares ordenados de $A \times B$ nos quais o primeiro elemento é menor que o segundo, isto é, são os pares formados pela "associação de cada elemento $x \in A$ com cada elemento de $y \in B$ tal que $x < y$".

Temos, então:

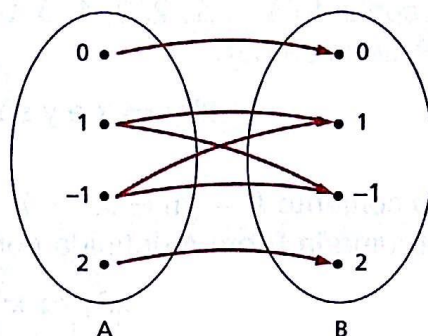
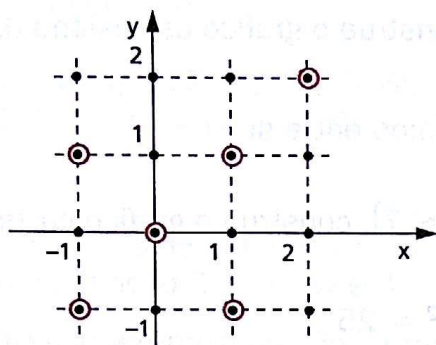
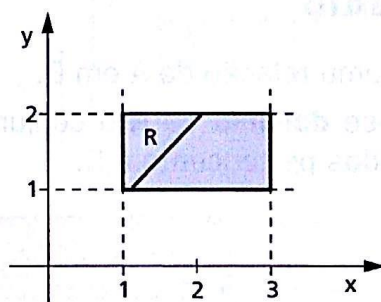
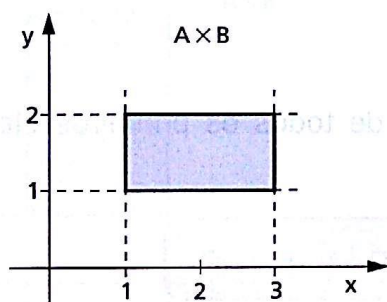
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

2º) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quais são os elementos da relação binária R de A em B assim definida: $xRy \Leftrightarrow y = x + 2$?

Fazem parte da relação todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$, $y \in B$ e $y = x + 2$.

Utilizando as representações gráficas:

3º) Se $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 = y^2\}$?

Fazendo a representação gráfica, notamos que:

$$R = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1), (2, 2)\}$$

4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, pede-se a representação cartesiana de $A \times B$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$.

EXERCÍCIOS

129. I) Enumere pares ordenados.

II) Represente por meio de flechas.

III) Faça o gráfico cartesiano das relações binárias de $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ definidas por:

a) $xRy \Leftrightarrow x + y = 2$

b) $xSy \Leftrightarrow x^2 = y$

c) $xTy \Leftrightarrow |x| = |y|$

d) $xVy \Leftrightarrow x + y > 2$

e) $xWy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 1$

130. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, enumere os pares ordenados e construa o gráfico cartesiano da relação R em A dada por:

$$R = \{(x, y) \in A^2 \mid \text{mdc}\ (x, y) = 2\}$$

131. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Construa o gráfico cartesiano da relação R em A definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ são primos entre si}$$

132. Dado o conjunto $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid -7 \leqslant m \leqslant 7\}$, construa o gráfico cartesiano da relação binária R em A definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

V. Domínio e imagem

66. Domínio

Seja R uma relação de A em B.

Chama-se **domínio** de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencente a R.

$$x \in D \Leftrightarrow \exists\, y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

Decorre da definição que $D \subset A$.

67. Imagem

Chama-se **imagem** de R o conjunto Im de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencente a R.

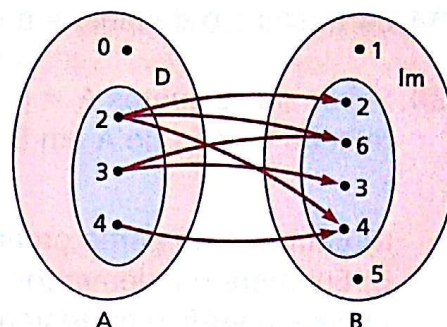
$$y \in Im \Leftrightarrow \exists\, x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Decorre da definição que $Im \subset B$.

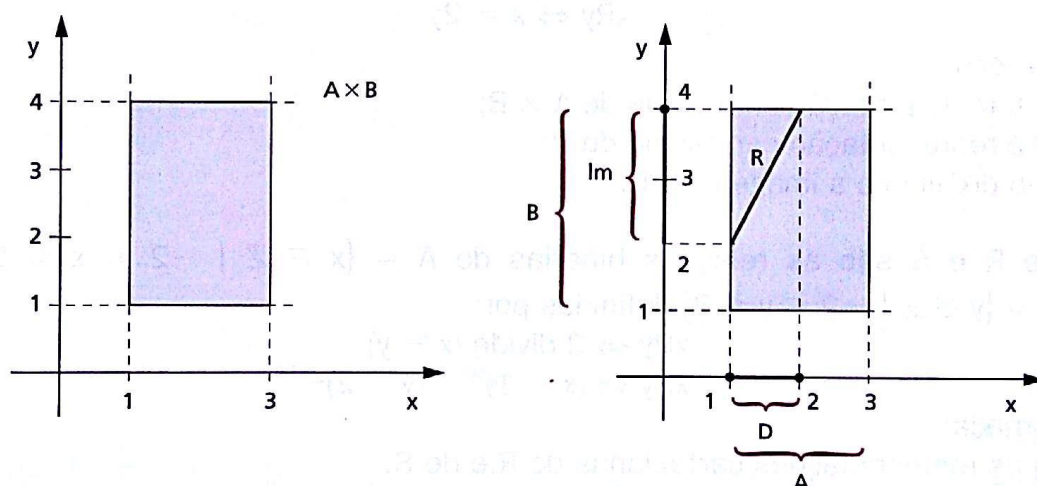
Exemplos:

1º) Se $A = \{0, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \text{ é múltiplo de } x\}$?

Utilizando o esquema das flechas é fácil perceber que D é o conjunto dos elementos de A dos quais partem flechas e que Im é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam flechas; portanto:

$R = \{(2, 2), (2, 4)\ (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$
$D = \{2, 3, 4\}$ $\quad$ $Im = \{2, 3, 4, 6\}$

2º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 4\}$, qual é o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$?

Utilizando a representação cartesiana, temos:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 4\}$

EXERCÍCIOS

133. Estabeleça o domínio e a imagem das seguintes relações:

a) $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$

b) $\{(-2, 4), (-1, 1), (3, -7), (2, 1)\}$

c) $\{(2, 1), (1, -3), (5, \sqrt{2})\}$

d) $\{(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2}), (1 - \sqrt{3}, 1)\}$

e) $\left\{\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -1\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\right\}$

134. Estabeleça o domínio e a imagem das relações binárias do exercício 129.

135. Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e R a relação binária de A em B definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

a) Enumere os pares ordenados de R.
b) Enumere os elementos do domínio e da imagem de R.
c) Faça o gráfico cartesiano de R.

136. Qual é o domínio da relação

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2}{4 - x^2}\right\}?$$

137. Se R é a relação binária de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 4\}$, definida por:

$$xRy \Leftrightarrow x = 2y$$

forneça:
a) a representação cartesiana de $A \times B$;
b) a representação cartesiana de R;
c) o domínio e a imagem de R.

138. Se R e S são as relações binárias de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$ em $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant y \leqslant 3\}$ definidas por:

$$xRy \Leftrightarrow 2 \text{ divide } (x - y)$$
$$xSy \Leftrightarrow (x - 1)^2 = (y - 2)^2$$

forneça:
a) as representações cartesianas de R e de S;
b) o domínio e a imagem de R e de S;
c) $R \cap S$.

VI. Relação inversa

68. Dada uma relação binária R de A em B, consideremos o conjunto

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

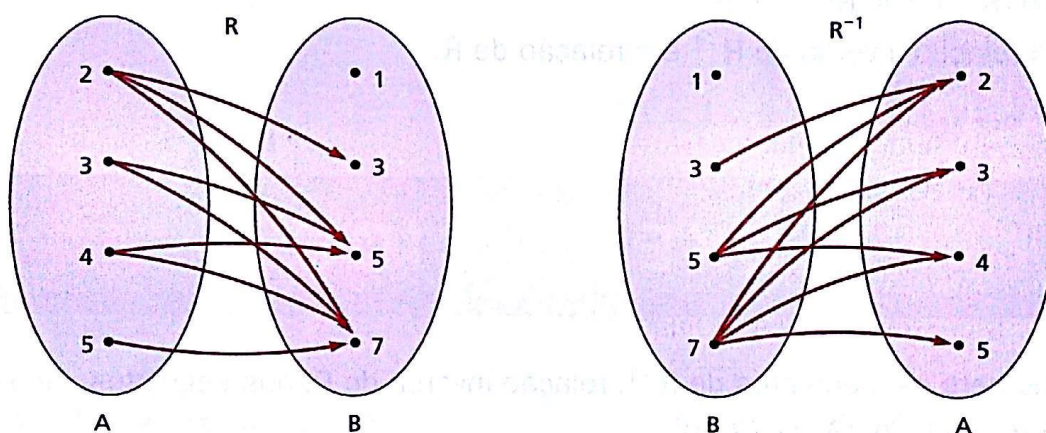
Como R^{-1} é subconjunto de $B \times A$, então R^{-1} é uma relação binária de B em A, à qual daremos o nome de **relação inversa de R**.

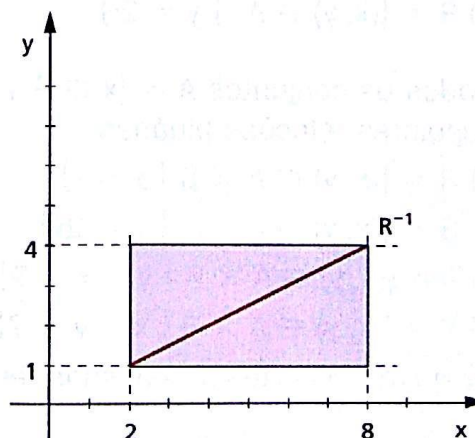
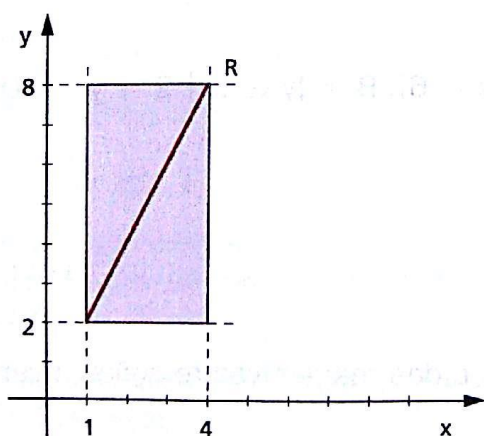
$$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$$

Decorre dessa definição que R^{-1} é o conjunto dos pares ordenados obtidos a partir dos pares ordenados de R invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

Exemplos:

1º) Se $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, quais são os elementos de $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ e de R^{-1}?

Utilizando o esquema das flechas,

temos: $R = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 7)\}$ e
$R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 4), (7, 5)\}$.

2º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y \leqslant 8\}$, representar no plano cartesiano as relações $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ e sua inversa R^{-1}.

VII. Propriedades das relações

69. São evidentes as seguintes propriedades:

1ª) $D(R^{-1}) = Im(R)$

isto é, o domínio de R^{-1} é igual à imagem de R.

2ª) $Im(R^{-1}) = D(R)$

isto é, a imagem de R^{-1} é igual ao domínio de R.

3ª) $(R^{-1})^{-1} = R$

isto é, a relação inversa de R^{-1} é a relação de R.

EXERCÍCIOS

139. Enumere os elementos de R^{-1}, relação inversa de R, nos seguintes casos:

a) $R = \{(1, 2), (3, 1), (2, 3)\}$

b) $R = \{(1, -1), (2, -1), (3, -1), (-2, 1)\}$

c) $R = \{(-3, -2), (1, 3), (-2, -3), (3, 1)\}$

140. Enumere os elementos e esboce os gráficos de R e R^{-1}, relações binárias em $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$, nos seguintes casos:

a) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + y = 8\}$

b) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid x + 2y = 10\}$

c) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = (x - 3)^2 + 1\}$

d) $R = \{(x, y) \in A^2 \mid y = 2^x\}$

141. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 10\}$ e as seguintes relações binárias:

a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$

b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

c) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$

d) $V = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 7\}$

dê o gráfico cartesiano dessas relações e das respectivas relações inversas.

Introdução às funções

I. Conceito de função

70. Exemplos iniciais

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

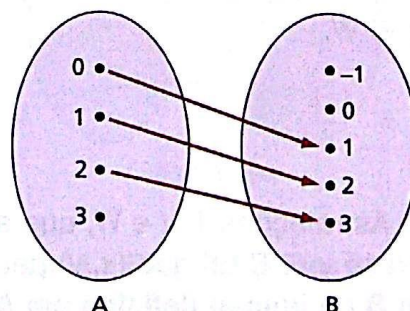
e as seguintes relações binárias de A em B:

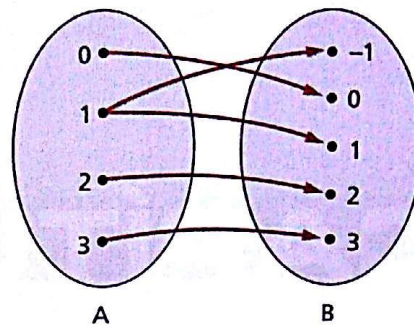
$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$
$S = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$
$T = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$
$V = \{(x, y) \in A \times B \mid y = (x - 1)^2 - 1\}$
$W = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2\}$

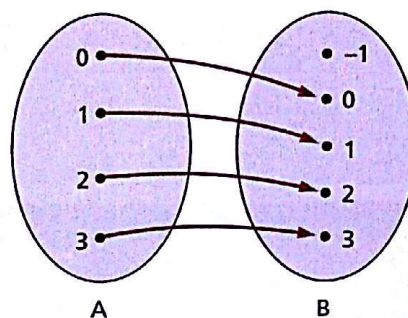
Analisando cada uma das relações, temos:

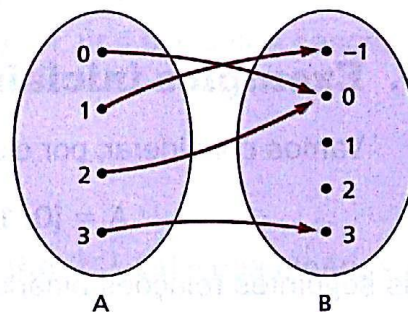
a) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

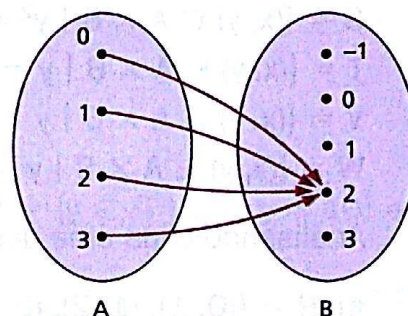
Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$.

Para o elemento $3 \in A$, não existe $y \in B$ tal que $(3, y) \in R$.

b) $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, 2), (3, 3)\}$

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$. Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos de B, o 1 e o -1, tais que $(1, 1) \in S$ e $(1, -1) \in S$.

c) $T = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in T$.

d) $V = \{(0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)\}$

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in V$.

e) $W = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

Para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in W$.

As relações T, V e W, que apresentam a particularidade: "para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que (x, y) pertence à relação", recebem o nome de **aplicação de A em B** ou **função definida em A com imagens em B**.

II. Definição de função

71. Dados dois conjuntos A e B(*), não vazios, uma relação *f* de A em B recebe o nome de **aplicação de A em B** ou **função definida em A com imagens em B** se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é aplicação de A em B} \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists \mid y \in B \mid (x, y) \in f)$$

72. Esquema de flechas

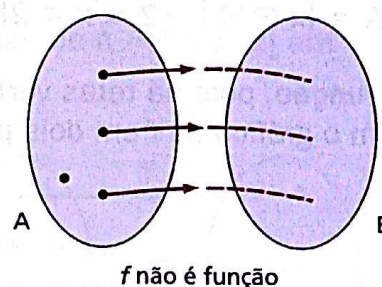
Vejamos agora, com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação *f* de A em B para ser aplicação (ou função).

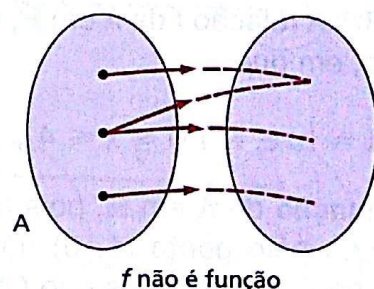
1ª) É necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A "deve servir como ponto de partida de flecha".

2ª) É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A "deve servir como ponto de partida de uma única flecha".

Uma relação *f* não é aplicação (ou função) se não satisfizer uma das condições acima, isto é:

1ª) se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma ou

f não é função

2ª) se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

f não é função

(*) Em todo o nosso estudo de funções, fica estabelecido que A e B são conjuntos formados de números reais, isto é, A e B contidos em $\mathbb{R}$.

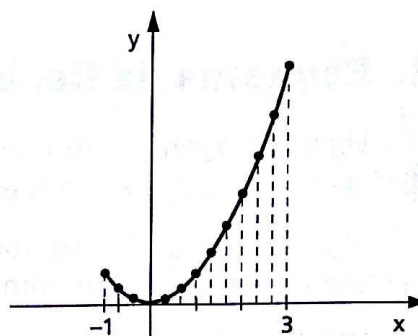
73. Gráfico cartesiano

Podemos verificar pela representação cartesiana da relação f de A em B se f é ou não função: basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto (x, 0), em que $x \in A$, "encontra sempre o gráfico de f em um só ponto".

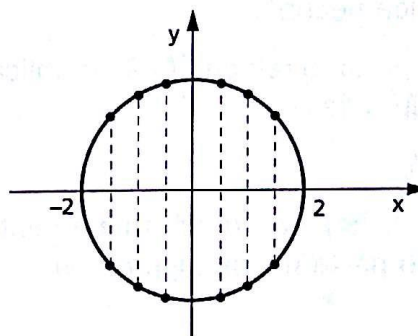
Exemplos:

1º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$,

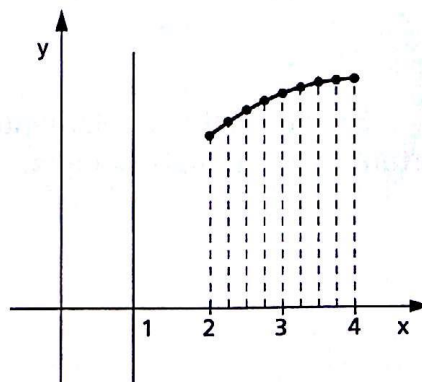
representada ao lado, **é função**, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$ "encontra sempre o gráfico de f num só ponto".

2º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, representada ao lado, em que

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$,

não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em dois pontos.

3º) A relação f de A em $\mathbb{R}$, representada ao lado, em que

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$,

não é função de A em $\mathbb{R}$, pois a reta vertical conduzida pelo ponto (1, 0) não encontra o gráfico de f. Observamos que f é função de B em $\mathbb{R}$ em que

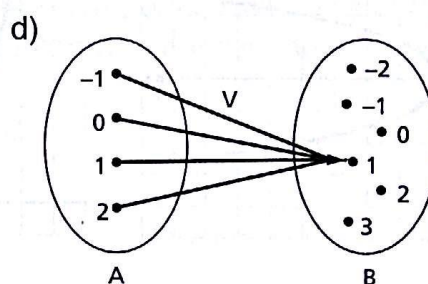
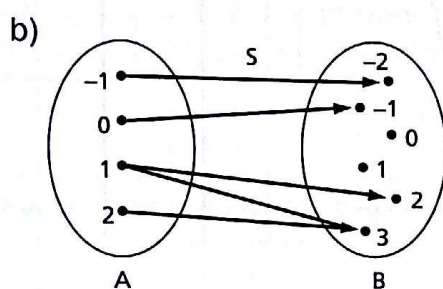
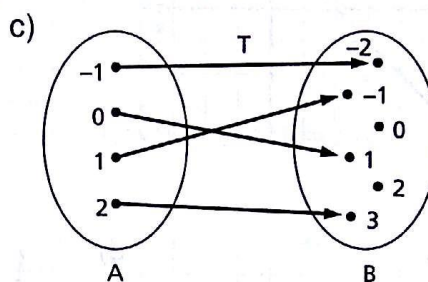
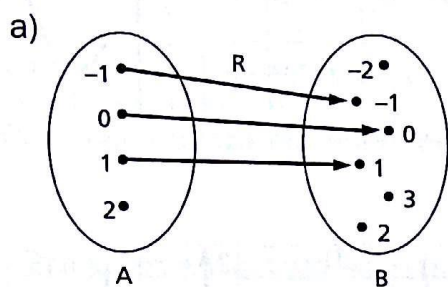
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$.

EXERCÍCIOS

142. Estabeleça se cada um dos esquemas das relações abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justifique.

a)

c)

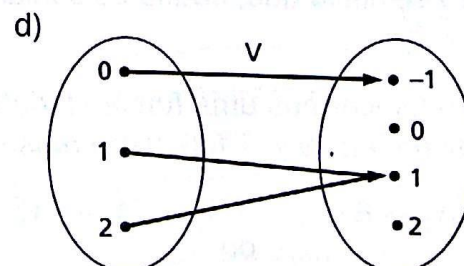
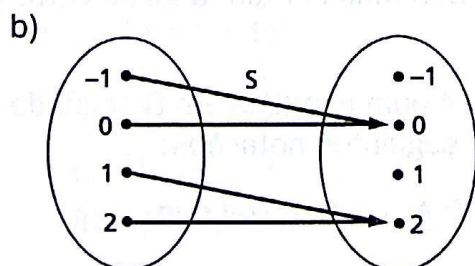
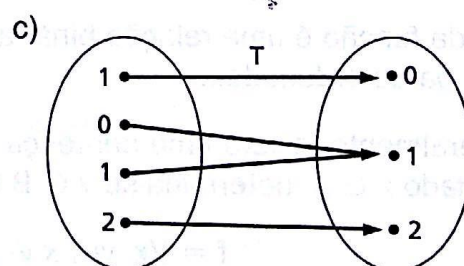
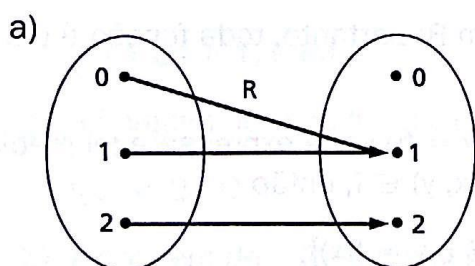
b)

d)

143. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$?

a)

c)

b)

d)

144. Quais das relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

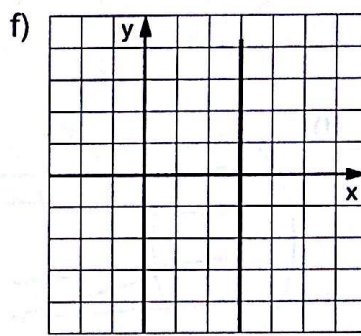
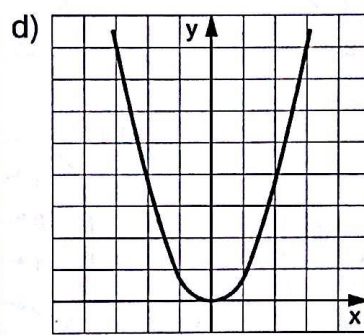
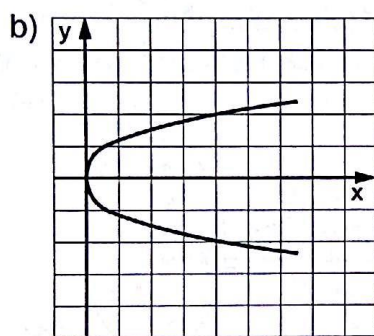
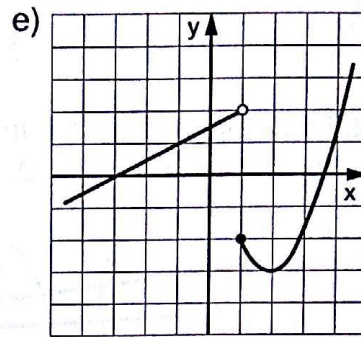
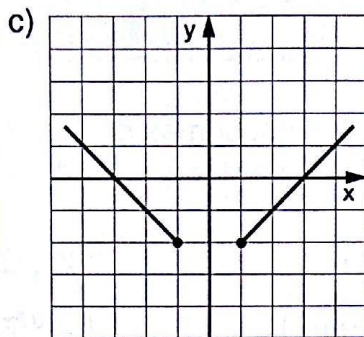
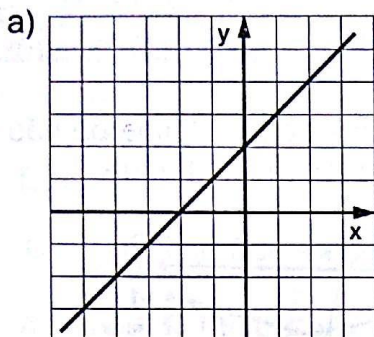
a)

c)

e)

b)

d)

f)

III. Notação das funções

74. Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}.$$

Isso significa que, dados os conjuntos A e B, a função *f* tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicarmos uma função *f*, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$$\begin{array}{l} f\colon A \to B \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} f\colon A \to B \quad \text{tal que} \\ \quad y = f(x) \end{array}$$

Exemplos:

1º) f: A → B tal que $y = 2x$

é uma função que associa a cada *x* de A um *y* de B tal que $y = 2x$.

2º) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$

é uma função que leva a cada *x* de $\mathbb{R}$ um *y* de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.

3º) f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$

é uma função que faz corresponder a cada $x \in \mathbb{R}_+$ um $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$.

75. Imagem de um elemento

Se $(a, b) \in f$, como já dissemos anteriormente, o elemento *b* é chamado **imagem** de *a* pela aplicação *f* ou **valor** de *f* no elemento *a*, e indicamos:

$$f(a) = b$$

que se lê "*f* de *a* é igual a *b*".

Exemplo:

Seja a função

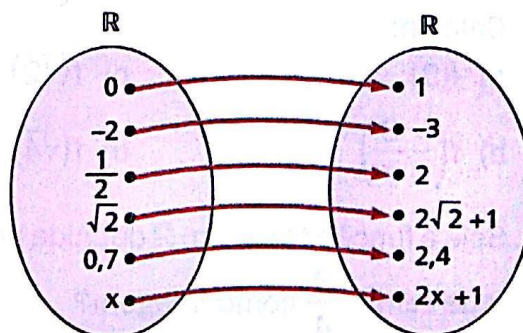
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x + 1$, então:

a) a imagem de 0 pela aplicação *f* é 1, isto é:

$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

b) a imagem de −2 pela aplicação *f* é −3, isto é:
$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$

c) analogamente:
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 = 2$
$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} + 1$
$f(0{,}7) = 2 \cdot 0{,}7 + 1 = 2{,}4$

EXERCÍCIOS

145. Qual é a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?
a) *f* associa cada número real ao seu oposto.
b) *g* associa cada número real ao seu cubo.
c) *h* associa cada número real ao seu quadrado menos 1.
d) *k* associa cada número real ao número 2.

146. Qual é a notação das seguintes funções?
a) *f* é função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com 1.
b) *g* é a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número inteiro à potência de base 2 desse número.
c) *h* é a função de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu inverso.

147. Seja *f* a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcule:

a) $f(2)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$ d) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

148. Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcule:

a) $f(2)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) $f(\sqrt{3})$

b) $f(-1)$ d) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ f) $f(1 - \sqrt{2})$

149. Seja P o único número natural que é primo e par. Sendo $f(x) = (0{,}25)^{-x} + x - 1$, determine o valor de f(P).

150. Seja *f* a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule:

a) $f(3)$ c) $f(\sqrt{2})$ e) $f(\sqrt{3} - 1)$

b) $f\left(-\frac{3}{7}\right)$ d) $f(\sqrt{4})$ f) $f(0{,}75)$

151. Seja a função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do domínio que tem $-\frac{3}{4}$ como imagem?

Solução

Para determinar o valor de *x* tal que $f(x) = -\frac{3}{4}$ basta, portanto, resolver a equação $\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4}$.

Resolvendo a equação:

$$\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(2x - 3) = -3 \cdot 5 \Leftrightarrow 8x - 12 = -15 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}$$

Resposta: O elemento é $x = -\frac{3}{8}$.

152. Seja a função *f* de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Qual é o elemento do domínio que tem imagem 2?

153. Quais são os valores do domínio da função real definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$ que produzem imagem igual a 3?

154. A função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(3x) = 3f(x)$. Se $f(9) = 45$, calcule $f(1)$.

Solução

Fazendo $3x = 9 \Rightarrow x = 3$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 3 \cdot f(3) = 45 = 3 \cdot 15 \Rightarrow f(3) = 15$

Fazendo $3x = 3 \Rightarrow x = 1$

$f(3) = f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1) = 15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow f(1) = 5$

Portanto, $f(1) = 5$.

155. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade: $f(m \cdot x) = m \cdot f(x)$ para $m \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(0)$.

156. É dada uma função real tal que:

1. $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$
2. $f(1) = 2$
3. $f(\sqrt{2}) = 4$

Calcule $f(3 + \sqrt{2})$.

157. Seja *f* uma função definida no conjunto dos números naturais, tal que:

$$f(n + 1) = 2f(n) + 3$$

para todo *n* natural.

a) Supondo f(0) = 0, calcule f(1), f(2), f(3), f(4), ... e descubra a "fórmula geral" de f(n).

b) Prove por indução finita a fórmula descoberta.

IV. Domínio e imagem

Considerando que toda função *f* de A em B é uma relação binária, então *f* tem um **domínio** e uma **imagem.**

76. Domínio

Chamamos de **domínio** o conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

isto é,

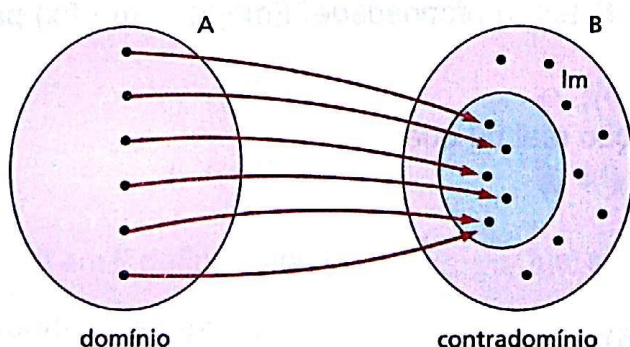
$$D = A$$

77. Imagem

Chamamos de **imagem** o conjunto Im dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto:

imagem é subconjunto do contradomínio

isto é,

$$Im \subset B$$

Notemos que, feita a representação cartesiana da função *f*, temos:

Domínio

(D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de *f*, isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de *f*.

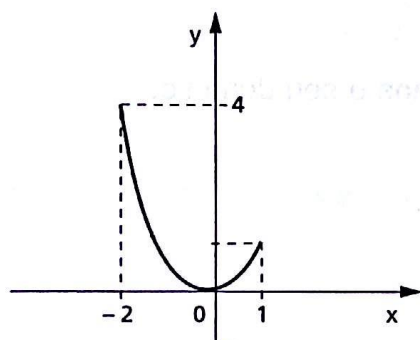
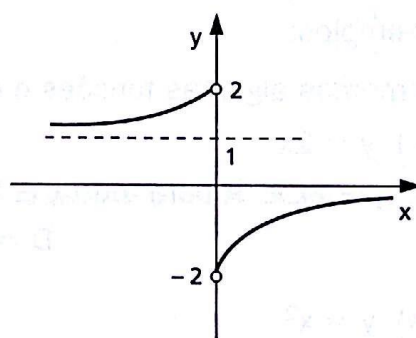
Imagem

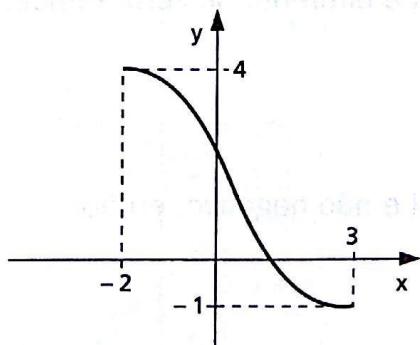
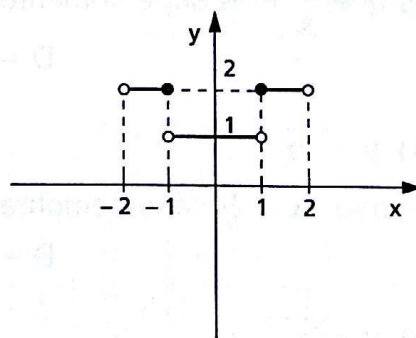
(Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de *f*, isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de *f*.

Exemplos:

1º)

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 4\}$

2º)

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 4\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0$ ou $1 < y < 2\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$
$Im = \{1, 2\}$

78. Domínio das funções numéricas

As funções que apresentam maior interesse na Matemática são as funções numéricas, isto é, aquelas em que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. As **funções numéricas** são também chamadas **funções reais de variável real.**

Observemos que uma função *f* fica completamente definida quando são dados o seu domínio D, o seu contradomínio e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Quando nos referimos à função *f* e damos apenas a sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subentendemos que D é o conjunto dos numeros reais *x* cujas imagens pela aplicação *f* são números reais, isto é, D é formado por todos os números reais *x* para os quais é possível calcular f(x).

$$x \in D \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos:

Tomemos algumas funções e determinemos o seu domínio.

1º) $y = 2x$

notando que $2x \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

2º) $y = x^2$

notando que $x^2 \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

3º) $y = \dfrac{1}{x}$

notemos que $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, *x* é real e diferente de zero; temos, então:

$$D = \mathbb{R}^*$$

4º) $y = \sqrt{x}$

notemos que $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, *x* é real e não negativo; então:

$$D = \mathbb{R}_+$$

5º) $y = \sqrt[3]{x}$

notando que $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$D = \mathbb{R}$$

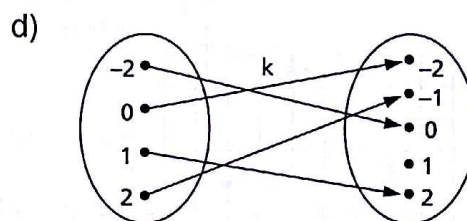
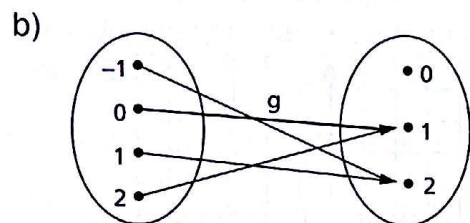
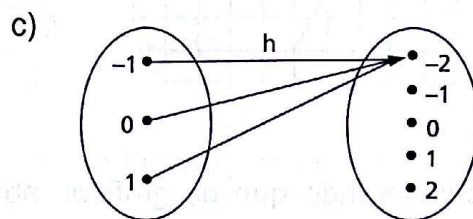
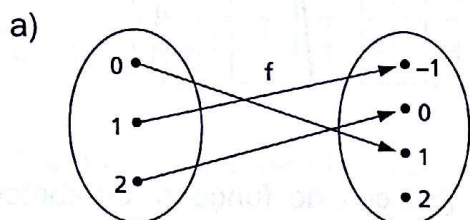
EXERCÍCIOS

158. Estabeleça o domínio e a imagem das funções abaixo:

a)

c)

b)

d)

159. Determine o conjunto imagem das funções abaixo representadas nos gráficos cartesianos.

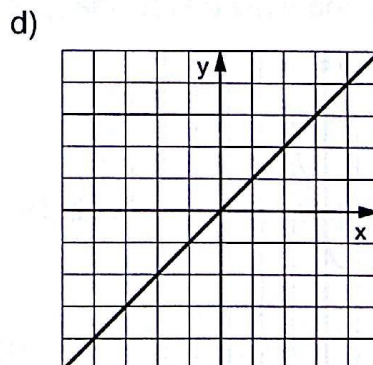
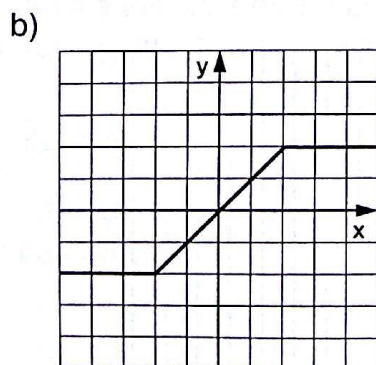
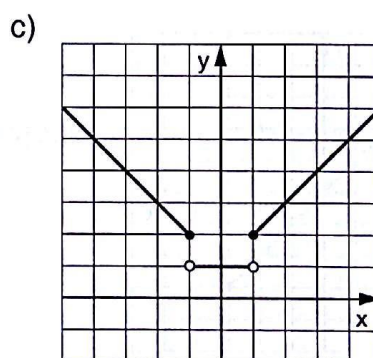
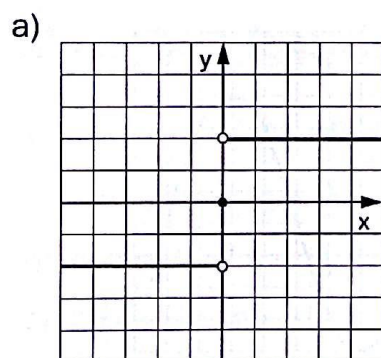
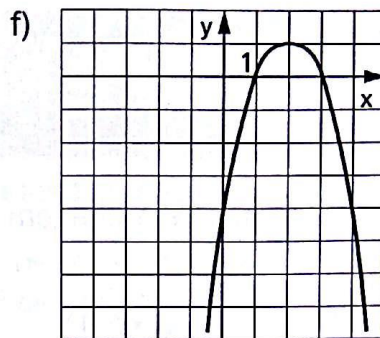
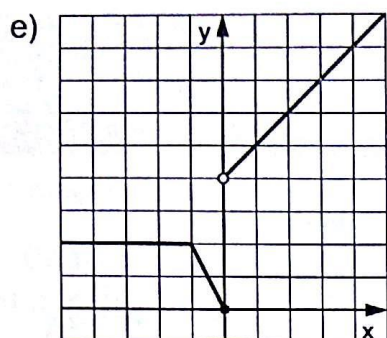
a)

c)

b)

d)

e)

f)

160. Considerando que os gráficos abaixo são gráficos de funções, estabeleça o domínio e a imagem.

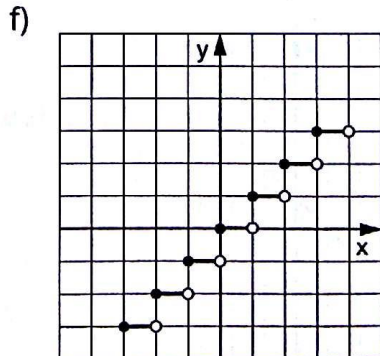
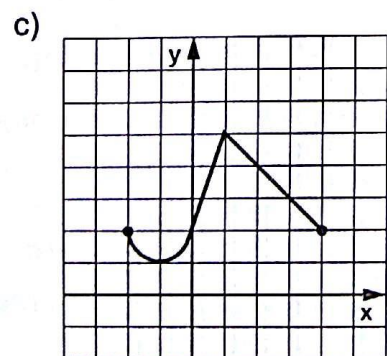
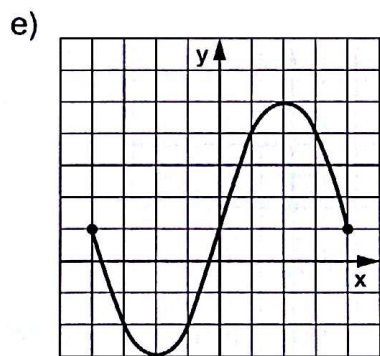
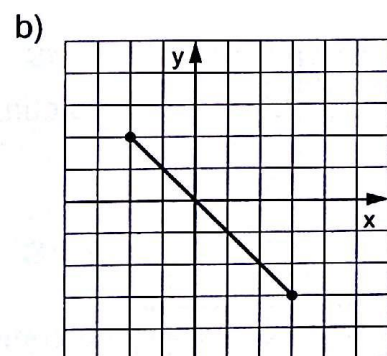
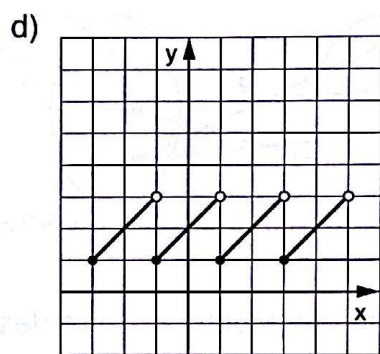
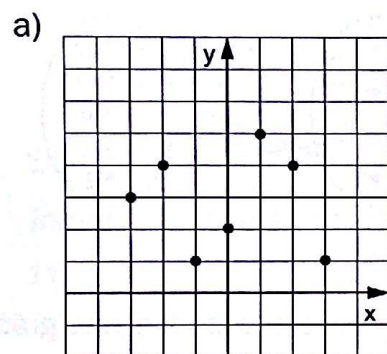
a)

d)

b)

e)

c)

f)

161. Dê o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

c) $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$

d) $p(x) = \sqrt{x - 1}$

e) $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

f) $r(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2}}{x - 2}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$

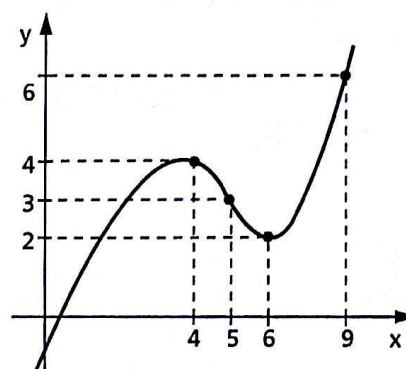
h) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x + 3}}$

i) $u(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 2}}{x - 3}$

162. Sendo $x \geqslant 4$, determine o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 4}$.

163. Se $f: A \to B$ é uma função e se $D \subset A$, chamamos de imagem de D pela função *f* ao conjunto anotado e definido por:

$$f < D > = \{y \in B \mid \text{existe } x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Se *g* é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujo gráfico está representado ao lado, determine a imagem de g do intervalo fechado [5; 9].

V. Funções iguais

79. Duas funções $f: A \to B$ e $g: C \to D$ são iguais se, e somente se, apresentarem:

a) domínios iguais ($A = C$);

b) contradomínios iguais ($B = D$);

c) $f(x) = g(x)$ para todo *x* do domínio.

Isso equivale a dizer que duas funções *f* e *g* são iguais se, e somente se, forem conjuntos iguais de pares ordenados.

Exemplos:

1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, então as funções de A em B definidas por:

$$f(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

são iguais, pois:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 1 = 0 \text{ e } g(1) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 - 1 = 1 \text{ e } g(2) = \frac{4 - 1}{2 + 1} = 1$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 3 - 1 = 2 \text{ e } g(3) = \frac{9 - 1}{3 + 1} = 2$$

ou seja, $f = g = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$.

2º) As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são iguais, pois $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3º) As funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não são iguais, pois $x \neq |x|$ para $x < 0$.

EXERCÍCIOS

164. Sejam as funções *f*, *g* e *h* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

165. As funções *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e *g* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Justifique.

166. As funções *f* e *g* cujas leis de correspondência são

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}}$ podem ser iguais? Justifique.

167. As funções *f* e *g* de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2 - x}}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 - x}}$ são iguais? Justifique.

168. As funções:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ e $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ são iguais? Justifique.

DE
WEEGHDAET
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

LEITURA

Stevin e as frações decimais

Hygino H. Domingues

As frações comuns positivas surgiram naturalmente na história da Matemática: na divisão de um inteiro por outro, quando o primeiro não é múltiplo do segundo. Os babilônios, por exemplo, uma vez que dividir por *a* equivale a multiplicar por $\frac{1}{a}$, tinham até tabelas de inversos no seu sistema sexagesimal. Essas tabelas mostravam, por exemplo, expressões como "igi 2 gál-bi 30" e "igi 3 gál-bi 20", que significam, respectivamente, $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ e $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$. E sabiam que inversos $\frac{1}{a}$, em que *a* não tem fatores primos diferentes de 2, 3 e 5, têm representação sexagesimal finita.

Quanto aos números irracionais, é possível que acreditassem, erradamente, como é bem sabido, que as representações aproximadas que obtinham (para $\sqrt{2}$, por exemplo) pudessem se transformar em exatas se mais casas sexagesimais fossem alcançadas.

O importante porém é que, mediante a notação posicional, os babilônios representavam (aproximadamente ou não) os números reais que lhes surgissem, sem o uso de denominadores. Vestígios disso ainda se encontram nas unidades de medida de ângulo e tempo. Por exemplo 2°15'32" significa $2 + \frac{15}{60} + \frac{32}{3600}$ graus.

Os egípcios, por sua vez, em geral expressavam a parte fracionária de um quociente não exato entre dois inteiros mediante uma soma de frações unitárias (de numerador 1) — o que sempre é possível, embora isso só fosse conhecido por eles empiricamente. Por exemplo, no papiro Rhind, importante documento egípcio de natureza matemática (aproximadamente 1800 a.C.), o escriba obteve: $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Quanto aos números irracionais, quando ocorriam em problemas algébricos, eram expressos aproximadamente através de números inteiros ou frações, sem nenhuma preocupação de ordem teórica.

Os gregos, embora tivessem criado uma matemática incomparavelmente superior à de babilônios e egípcios, sob o aspecto teórico, na questão em pauta acabaram buscando inspiração nos egípcios e babilônios. Assim é que de início usaram frações unitárias e, em séculos posteriores, frações comuns e sexagesimais. Estas, por exemplo, aparecem na obra trigonométrica de

Ptolomeu (séc. II d.C.) e eram algo estranho ao sistema de numeração grego como os graus, minutos e segundos o são para o nosso.

E até o Renascimento, quando o uso de frações decimais começou a ser insistentemente recomendado, pouco mudara nesse panorama. E o maior responsável pela disseminação de tal uso foi o maior matemático dos Países Baixos (hoje Holanda): Simon Stevin.

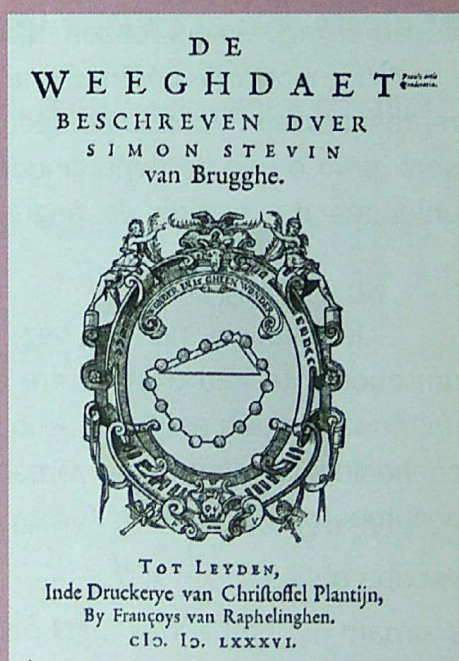
Stevin (1548-1620) ao que parece começou a vida como guarda-livros. Mas, por conciliar grande formação teórica nas ciências exatas e um espírito agudamente prático, chamou a atenção do príncipe Maurício de Orange. Esta foi a porta pela qual se tornou engenheiro militar e, posteriormente, comissário de obras de seu país. Seus trabalhos sobre Estática e Hidrostática o notabilizaram entre seus contemporâneos, dada a importância do assunto num país com as características físico-geográficas da Holanda.

Em 1585 publica em Leyden o livreto *De thiende* (*O décimo*) com o qual pretendia ensinar a todos "como efetuar, com facilidade nunca vista, todos os cálculos necessários entre os homens por meio de inteiros sem frações". A representação ou forma decimal, provavelmente a principal vantagem da notação posicional, depois de oito séculos de uso dos numerais indo-arábicos, finalmente era apresentada de maneira a poder vingar. A notação de Stevin, contudo, não era feliz: num círculo acima ou à direita de cada dígito escrevia o expoente da potência de dez do denominador subentendido. Por exemplo, a aproximação 3,1416 do número π podia aparecer como 3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④. O uso da vírgula ou do ponto como separador decimal, sugestão de Napier, acabou prevalecendo com o tempo.

Na mesma obra, Stevin apresentou a ideia de criar um sistema unificado decimal de pesos e medidas para todo o mundo, adiantando-se em alguns séculos à sua adoção.

A invenção das frações decimais constitui uma das grandes etapas do desenvolvimento da matemática numérica. E é assim um dos fatores importantes a colocar Stevin entre os notáveis da Matemática em todos os tempos.

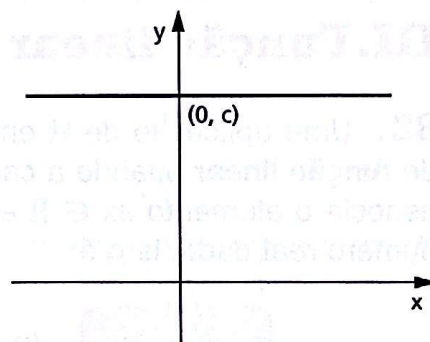
DE
WEEGHDAET
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
clɔ. Iɔ. LXXXVI.

Frontispício dos Princípios de estática, *de Simon Stevin (1586), mostrando o* clootcrans *(colar de esferas) e ostentando a inscrição "O que parece ser uma maravilha não é uma maravilha".*

CAPÍTULO VI

Função constante Função afim

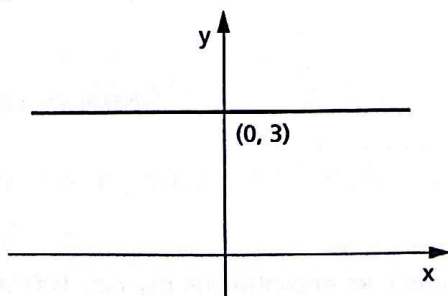
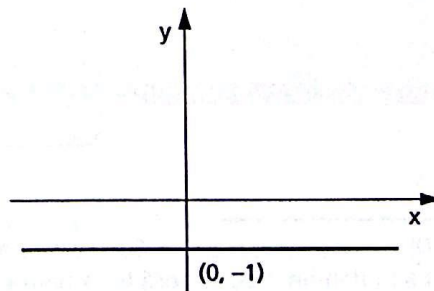
I. Função constante

80. Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função constante** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo dos x passando pelo ponto (0, c).

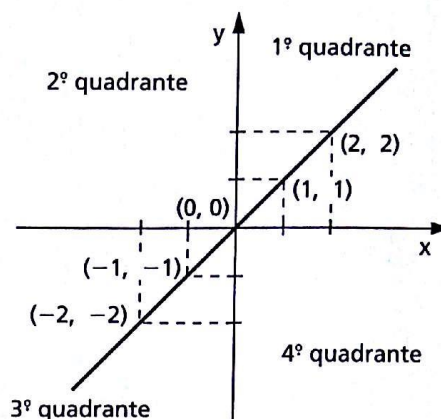
A imagem é o conjunto Im = {c}.

Exemplos:

Construir os gráficos das aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

1) $y = 3$

2) $y = -1$

II. Função identidade

81. Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função identidade** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x, isto é:

$$f(x) = x$$

O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

A imagem é o conjunto $Im = \mathbb{R}$.

III. Função linear

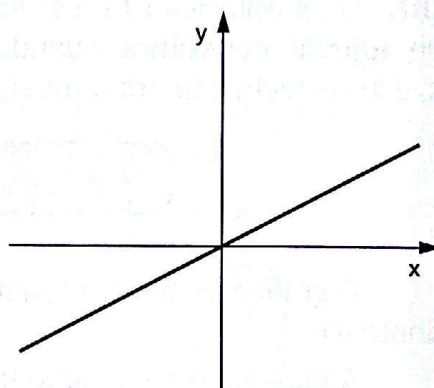
82. Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função linear** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$f(x) = ax \quad (a \neq 0)(*)$$

Demonstra-se que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem.(**)

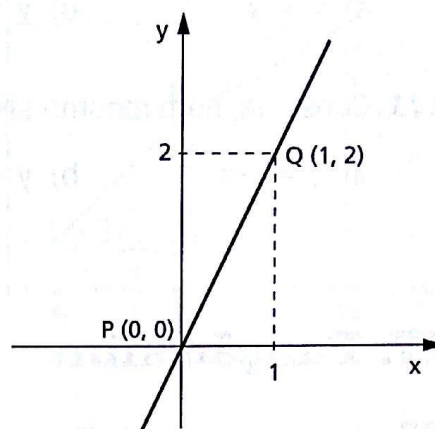
A imagem é o conjunto $Im = \mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja o $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \dfrac{y}{a} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que:

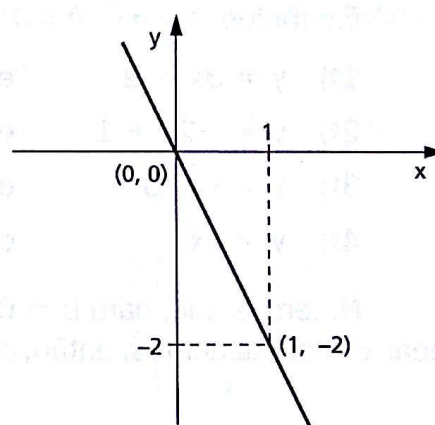
$$f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \frac{y}{a} = y$$

(*) Observe-se que, se $a = 0$, teremos a função constante $y = 0$.
(**) Essa demonstração será feita para um caso mais geral e se encontra nas páginas 100-101.

Exemplos:

1º) Construir o gráfico da função $y = 2x$. Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta e no caso da função linear um dos pontos é a origem, basta atribuir a x um valor não nulo e calcular o correspondente $y = 2x$.

x	y = 2x
1	2

Pelos pontos P(0, 0) e Q(1, 2) traçamos a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, que é precisamente o gráfico da função dada.

2º) Construir o gráfico da função $y = -2x$. Analogamente, temos:

x	y = −2x
1	−2

EXERCÍCIOS

169. Construa o gráfico das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2$
b) $y = \sqrt{2}$
c) $y = -3$
d) $y = 0$

170. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \frac{x}{2}$

171. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = -x$ b) $y = -2x$ c) $y = -3x$ d) $y = -\frac{x}{2}$

IV. Função afim

83. Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função afim** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ e *b* são números reais dados.

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

Exemplos:

1º)	$y = 3x + 2$	em que	$a = 3$	e	$b = 2$
2º)	$y = -2x + 1$	em que	$a = -2$	e	$b = 1$
3º)	$y = x - 3$	em que	$a = 1$	e	$b = -3$
4º)	$y = 4x$	em que	$a = 4$	e	$b = 0$

Notemos que, para $b = 0$, a função afim $y = ax + b$ se transforma na função linear $y = ax$; podemos, então, dizer que a função linear é uma particular função afim.

V. Gráfico

84. Teorema

"O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ é uma reta."

Demonstração:

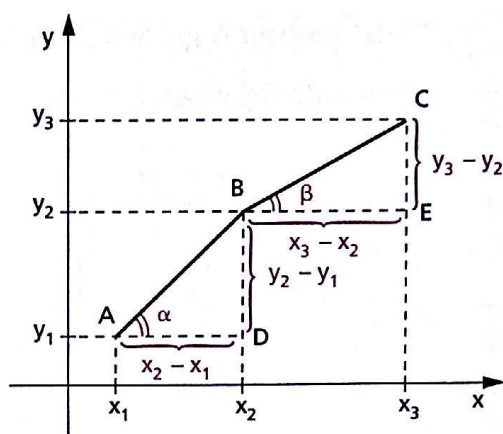
Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ e (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, mostremos, inicialmente, que os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes.

De fato:

$(x_1, y_1) \in f \Rightarrow y_1 = ax_1 + b$ (1)

$(x_2, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = ax_2 + b$ (2)

$(x_3, y_3) \in f \Rightarrow y_3 = ax_3 + b$ (3)

Subtraindo membro a membro, temos:

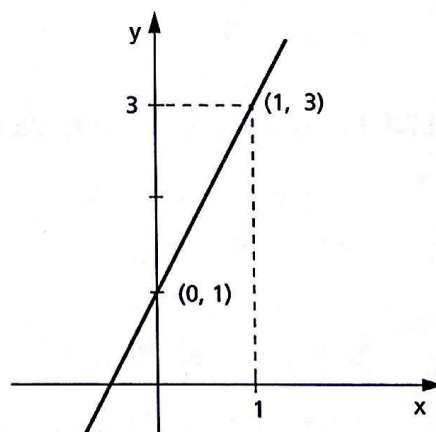
$$\left.\begin{aligned} y_3 - y_2 &= a(x_3 - x_2) \\ y_2 - y_1 &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos A, B e C estão alinhados.

85. Aplicações

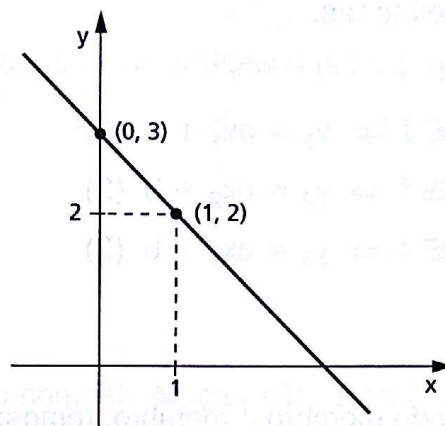
1ª) Construir o gráfico da função $y = 2x + 1$.

Considerando que o gráfico da função afim é uma reta, vamos atribuir a *x* dois valores distintos e calcular os correspondentes valores de *y*.

x	y = 2x + 1
0	1
1	3

O gráfico procurado é a reta que passa pelos pontos (0, 1) e (1, 3).

2ª) Construir o gráfico da função $y = -x + 3$.

De modo análogo, temos:

x	$y = -x + 3$
0	3
1	2

EXERCÍCIOS

172. Construa o gráfico cartesiano das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x + 2$

c) $y = 3x + 2$

d) $y = \dfrac{2x - 3}{2}$

e) $y = -3x - 4$

f) $y = -x + 1$

g) $y = -2x + 3$

h) $y = \dfrac{4 - 3x}{2}$

173. Resolva analítica e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solução analítica

Existem diversos processos analíticos pelos quais podemos resolver um sistema de equações. Vamos apresentar dois deles.

1º processo: Substituição

Este processo consiste em substituir o valor de uma das incógnitas, obtido a partir de uma das equações, na outra.

Resolvendo, por exemplo, a primeira equação na incógnita x, temos:

$$x - y = -3 \iff x = y - 3$$

e substituímos x por esse valor na segunda equação:

$$2(y - 3) + 3y = 4 \iff 2y - 6 + 3y = 4 \iff y = 2$$

que levamos à primeira equação, encontrando:

$$x - 2 = -3 \iff x = -1$$

A solução do sistema é o par ordenado (−1, 2).

2º processo: Adição

Este processo baseia-se nas seguintes propriedades:

I. "Num sistema de equações, se multiplicamos todos os coeficientes de uma equação por número não nulo, o sistema que obtemos é equivalente ao anterior (*)".

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \quad (k \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

II. "Num sistema de equações, se substituímos uma das equações pela sua soma com uma outra equação do sistema, o novo sistema é equivalente ao anterior".

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

O fundamento do processo da adição consiste no seguinte: aplicando a primeira propriedade, multiplicamos cada equação por números convenientes, de modo que os coeficientes de determinada incógnita sejam opostos e, aplicando a segunda propriedade, substituímos uma das equações pela soma das duas equações.

Assim, no sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

multiplicamos a primeira equação por 3

$$\begin{cases} 3x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação pela soma das duas equações, temos:

$$\begin{cases} 5x = -5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

(*) Sistemas de equações são equivalentes quando apresentam as mesmas soluções.

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo $x = -1$ em $2x + 3y = 4$, encontramos:

$$2 \cdot (-1) + 3y = 4 \Rightarrow y = 2$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

Solução gráfica

O sistema proposto

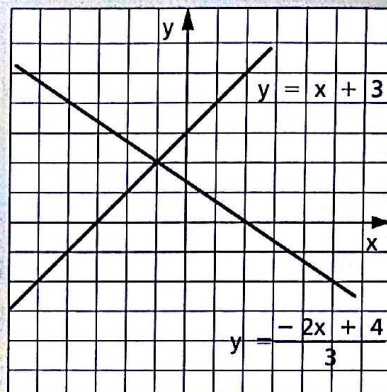
$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \dfrac{-2x + 4}{3} \end{cases}$$

Construímos os gráficos de

$$y = x + 3 \quad e \quad y = \frac{-2x + 4}{3}$$

A solução do sistema são as coordenadas do ponto de interseção das retas, portanto $(-1, 2)$.

174. Resolva analítica e graficamente os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

175. Resolva os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x - y} + \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x - y} + \dfrac{1}{x + y} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x + y + 1} - \dfrac{2}{2x - y + 3} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{2}{x + y + 1} + \dfrac{3}{2x - y + 3} = 1 \end{cases}$

Sugestão:

Faça $\dfrac{1}{x - y} = a$ e $\dfrac{1}{x + y} = b$.

176. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos (1, 2) e (3, −2).

Solução

Seja $y = ax + b$ a equação procurada. O problema estará resolvido se determinarmos os valores de *a* e *b*.
Considerando que o ponto (1, 2) pertence à reta de equação $y = ax + b$, ao substituirmos $x = 1$ e $y = 2$ em $y = ax + b$, temos a sentença verdadeira:

$$2 = a \cdot 1 + b, \quad \text{isto é:} \quad a + b = 2$$

Analogamente, para o ponto (3, −2), obtemos:

$$-2 = a \cdot 3 + b, \quad \text{isto é:} \quad 3a + b = -2$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

encontramos $a = -2$ e $b = 4$.
Assim, a equação da reta é $y = -2x + 4$.

177. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos:

a) (2, 3) e (3, 5)
b) (1, −1) e (−1, 2)
c) (3, −2) e (2, −3)
d) (1, 2) e (2, 2)

178. De uma caixa contendo bolas brancas e pretas, retiraram-se 15 brancas, ficando a relação de 1 branca para 2 pretas. Em seguida, retiraram-se 10 pretas, restando, na caixa, bolas na razão de 4 brancas para 3 pretas. Determine quantas bolas havia, inicialmente, na caixa.

179. A função *f* é definida por $f(x) = ax + b$. Sabe-se que $f(-1) = 3$ e $f(1) = 1$. Determine o valor de $f(3)$.

VI. Imagem

86. Teorema

O conjunto imagem da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é $\mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \dfrac{y - b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f\left(\frac{y - b}{a}\right) = a \cdot \frac{y - b}{a} + b = y.$$

VII. Coeficientes da função afim

87. O coeficiente *a* da função $y = ax + b$ é denominado **coeficiente angular** ou **declividade** da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente *b* da função $y = ax + b$ é denominado **coeficiente linear**.

Exemplo:

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe que, se $x = 0$, temos $y = 1$. Portanto, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo *y*.

EXERCÍCIOS

180. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto (1, 3) e tem coeficiente angular igual a 2.

Solução

A equação procurada é da forma $y = ax + b$.

Se o coeficiente angular é 2, então $a = 2$.

Substituindo $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, vem:

$$3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$$

A equação procurada é $y = 2x + 1$.

181. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto (−2, 4) e tem coeficiente angular igual a −3.

182. Obtenha a equação da reta com coeficiente angular igual a $-\frac{1}{2}$ e passando pelo ponto (−3, 1).

183. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto (−2, 1) e tem coeficiente linear igual a 4.

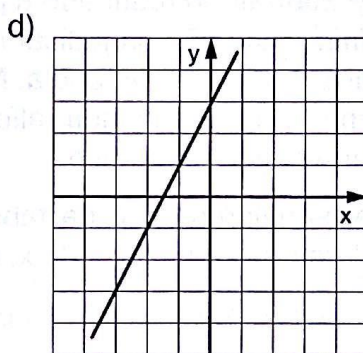
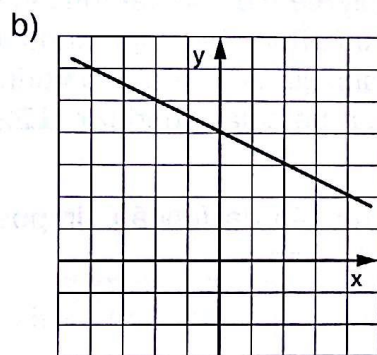
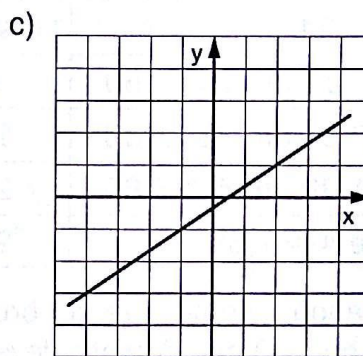
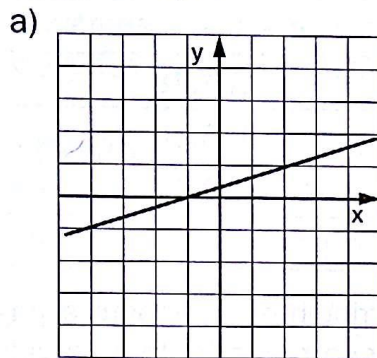
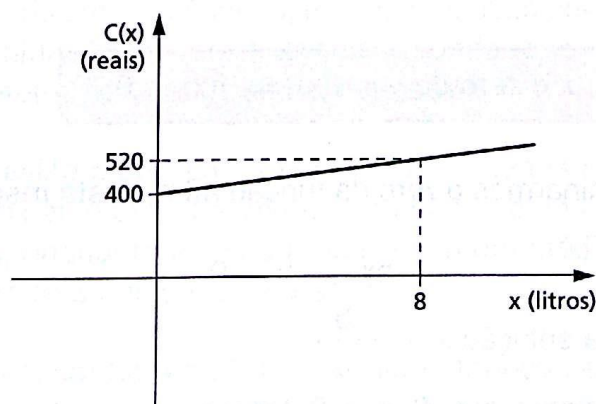
184. Obtenha a equação da reta com coeficiente linear igual a -3 e que passa pelo ponto $(-3, -2)$.

185. Dados os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obtenha a lei de correspondência dessas funções.

a)

c)

b)

d)

186. O custo C de produção de *x* litros de uma certa substância é dado por uma função linear de *x*, com $x \geqslant 0$, cujo gráfico está representado abaixo.

Nessas condições, o custo de R$ 700,00 corresponde à produção de quantos litros?

187. Considere esta tabela para o cálculo do imposto de renda a ser pago pelos contribuintes em um certo mês de 2012.

x	i	d
Renda bruta (R$)	**Alíquota %**	**Parcela a deduzir do imposto (R$)**
Até 1637,11	isento	–
De 1637,12 até 2453,50	7,5	122,78
De 2453,51 até 3271,38	15,0	306,80
De 3271,39 até 4087,65	22,5	552,15
Acima de 4087,65	27,5	n

Considerando *x* como a renda bruta de um contribuinte, o imposto a pagar é função *f* de *x*. O contribuinte deve multiplicar a sua renda bruta pelo valor da alíquota e subtrair do resultado a parcela a deduzir. Além disso, tal função deve ser **contínua**, para não prejudicar nem beneficiar contribuintes cuja renda se situe em faixas distintas da tabela. Note, por exemplo, que, ao passar da primeira faixa (isento) para a segunda (alíquota de 7,5%), a parcela a deduzir (122,78) não permite saltos no gráfico.

a) Utilize os valores *i* e *d* da tabela e dê a expressão da função "imposto a pagar" relativa a uma renda *x*, em cada faixa da tabela.

b) Determine o valor de *n* da tabela para tornar a função obtida no **item a** contínua.

VIII. Zero da função afim

88. Zero de uma função é todo número *x* cuja imagem é nula, isto é, $f(x) = 0$.

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Assim, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação de 1º grau:

$$ax + b = 0$$

que apresenta uma única solução $x = -\frac{b}{a}$.

De fato, resolvendo $ax + b = 0$, $a \neq 0$, temos:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

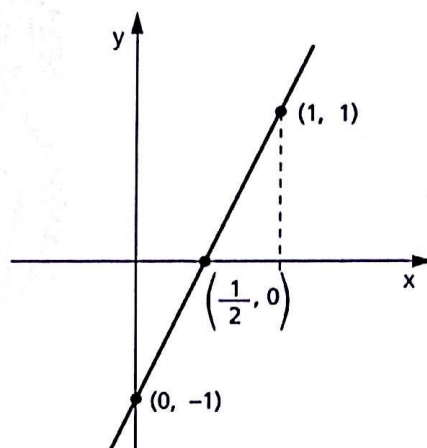
Exemplo:

O zero da função $f(x) = 2x - 1$ é $x = \frac{1}{2}$, pois, fazendo $2x - 1 = 0$, vem $x = \frac{1}{2}$.

Podemos interpretar o zero da função afim como sendo abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo dos x.

Exemplo:

Fazendo o gráfico da função $y = 2x - 1$, podemos notar que a reta intercepta o eixo dos x em $x = \frac{1}{2}$, isto é, no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

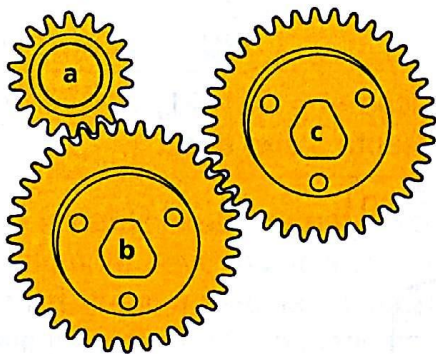
x	y
0	−1
1	1

EXERCÍCIOS

188. Na hora de fazer seu testamento, uma pessoa tomou a seguinte decisão: dividiria sua fortuna entre sua filha, que estava grávida, e a prole resultante dessa gravidez, dando a cada criança que fosse nascer o dobro daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo masculino, e o triplo daquilo que caberia à mãe, se fosse do sexo feminino. Nasceram trigêmeos, sendo dois meninos e uma menina. Como veio a ser repartida a herança legada?

189. Um pequeno avião a jato gasta sete horas a menos do que um avião a hélice para ir de São Paulo até Boa Vista. O avião a jato voa a uma velocidade média de 600 km/h, enquanto o avião a hélice voa em média a 275 km/h. Qual é a distância entre São Paulo e Boa Vista?

190. O salário médio, por hora de trabalho, numa fábrica de 110 trabalhadores é de R$ 10,00. Calculando-se, no entanto, apenas com os 100 trabalhadores homens, a média passa a ser R$ 10,60. Qual o salário médio das mulheres, por hora de trabalho, em reais?

191. Paulo e Joana recebem o mesmo salário por hora de trabalho. Após Paulo ter trabalhado 4 horas e Joana 3 horas e 20 minutos, Paulo tinha a receber R$ 45,00 a mais que Joana. Calcule em reais um décimo do que Paulo recebeu.

192. Qual o menor número inteiro de voltas que deve dar a roda *c* da engrenagem da figura, para que a roda *a* dê um número inteiro de voltas?

193. Supondo que dois pilotos de Fórmula 1 largam juntos num determinado circuito e completam, respectivamente, cada volta em 72 e 75 segundos, responda: depois de quantas voltas do mais rápido, contadas a partir da largada, ele estará uma volta na frente do outro?

IX. Funções crescentes e decrescentes

89. Função crescente

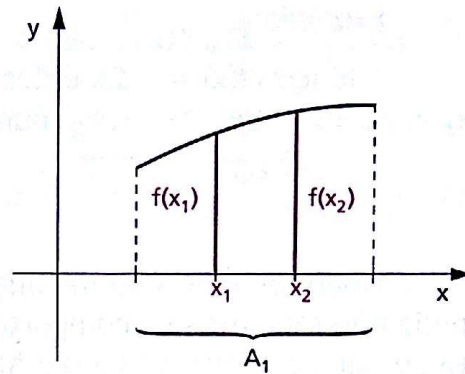
A função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$ é **crescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Em símbolos: *f* é crescente quando

$$(\forall\, x_1, x_2)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

e isso também pode ser posto assim:

$$(\forall\, x_1, x_2)\ \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0\right).$$

Na linguagem prática (não matemática), isso significa que a função é crescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a *x*, o valor de *y* também aumenta.

Exemplo:

A função f(x) = 2x é crescente em $\mathbb{R}$, pois:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{2x_1}_{f(x_1)} < \underbrace{2x_2}_{f(x_2)} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

90. Função decrescente

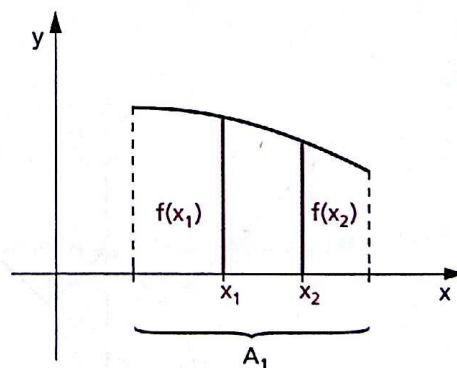
A função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$ é **decrescente** no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Em símbolos: *f* é decrescente quando

$$(\forall\, x_1, x_2)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

e isso também pode ser posto assim:

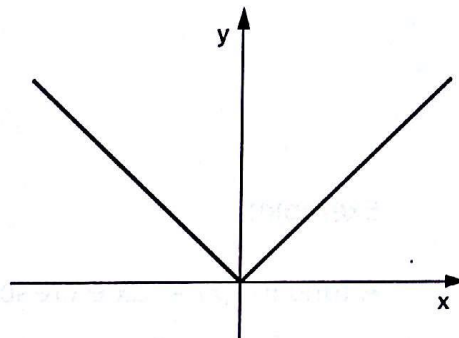
$$(\forall\, x_1, x_2)\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0\right).$$

Na linguagem prática (não matemática), isso significa que a função é decrescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a *x*, o valor de *y* diminui.

Exemplo:

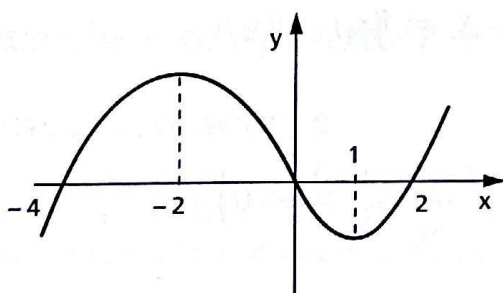
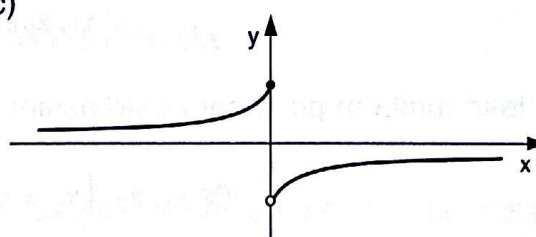
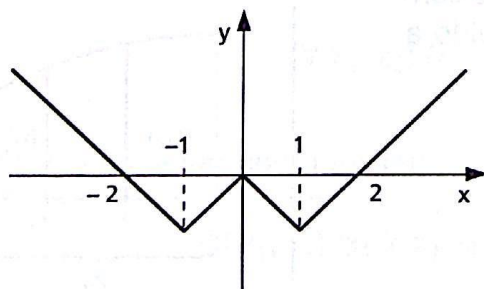
A função $f(x) = -2x$ é decrescente em $\mathbb{R}$, pois

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{-2x_1}_{f(x_1)} > \underbrace{-2x_2}_{f(x_2)} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que uma mesma função $y = f(x)$ pode não ter o mesmo comportamento (crescente ou decrescente) em todo o seu domínio.

É bastante comum que uma função seja crescente em certos subconjuntos de D e decrescente em outros. O gráfico ao lado representa uma função crescente em $\mathbb{R}_+$ e decrescente em $\mathbb{R}_-$.

EXERCÍCIOS

194. Com base nos gráficos abaixo, de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, especifique os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

a)

c)

b)

X. Crescimento/decrescimento da função afim

91. Teoremas

I) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente angular *a* for positivo.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

II) A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular *a* for negativo.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b \text{ é decrescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$$

EXERCÍCIOS

195. Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$:

a) $y = 3x - 2$ b) $y = -4x + 3$

Solução

a) É crescente, pois o coeficiente angular é positivo ($a = 3$).
b) É decrescente, pois o coeficiente angular é negativo ($a = -4$).

196. Especifique, para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$:

a) $y = 1 + 5x$ c) $y = x + 2$ e) $y = -2x$
b) $y = -3 - 2x$ d) $y = 3 - x$ f) $y = 3x$

197. Estude, segundo os valores do parâmetro *m*, a variação (crescente, decrescente ou constante) da função $y = (m - 1)x + 2$.

Solução

Se $m - 1 > 0$, isto é, $m > 1$, então a função terá coeficiente angular positivo e, portanto, será crescente em $\mathbb{R}$.

Se $m - 1 < 0$, isto é, $m < 1$, então a função terá coeficiente angular negativo e, portanto, será decrescente em $\mathbb{R}$.

Se $m - 1 = 0$, isto é, $m = 1$, então a função é $y = (1 - 1)x + 2$, ou seja, $y = 2$, que é constante em $\mathbb{R}$.

198. Estude, segundo os valores do parâmetro *m*, a variação (crescente, decrescente ou constante) das funções abaixo.

a) $y = (m + 2)x - 3$

b) $y = (4 - m)x + 2$

c) $y = 4 - (m + 3)x$

d) $y = m(x - 1) + 3 - x$

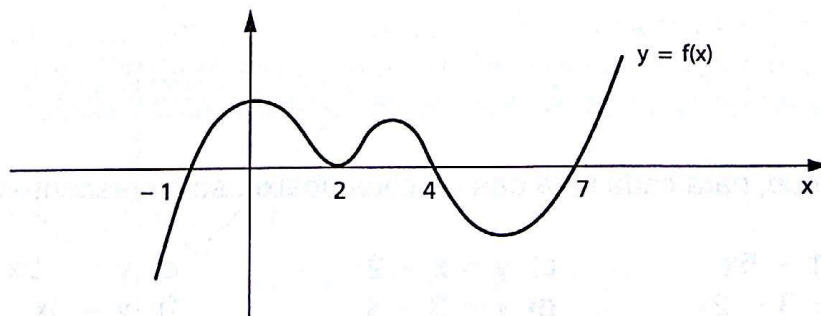
XI. Sinal de uma função

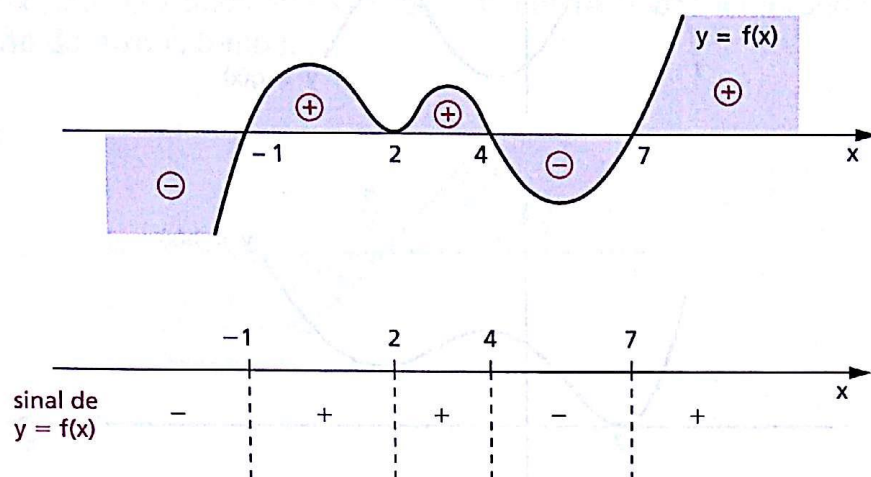
92. Seja a função f: A → B definida por $y = f(x)$. Vamos resolver o problema "para que valores de *x* temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?".

Resolver este problema significa estudar o sinal da função $y = f(x)$ para cada *x* pertencente a seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função, quando ela está representada no plano cartesiano, basta examinar se a ordenada de cada ponto da curva é positiva, nula ou negativa.

Exemplo:

Estudar o sinal da função $y = f(x)$ cujo gráfico está representado abaixo.

Observemos, inicialmente, que interessa o comportamento da curva $y = f(x)$ em relação ao eixo dos x, não importando a posição do eixo dos y.

Preparando o gráfico com aspecto prático, temos:

Conclusão:

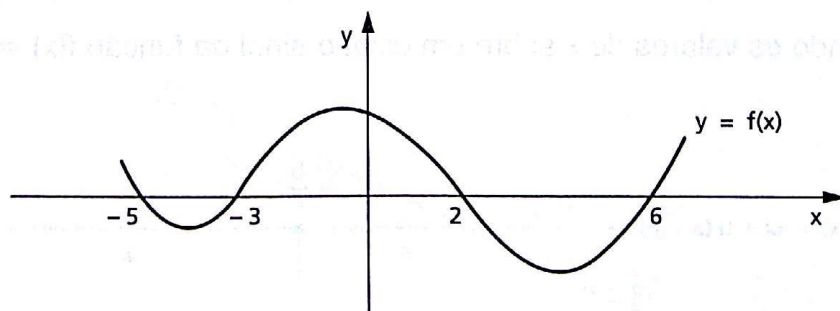
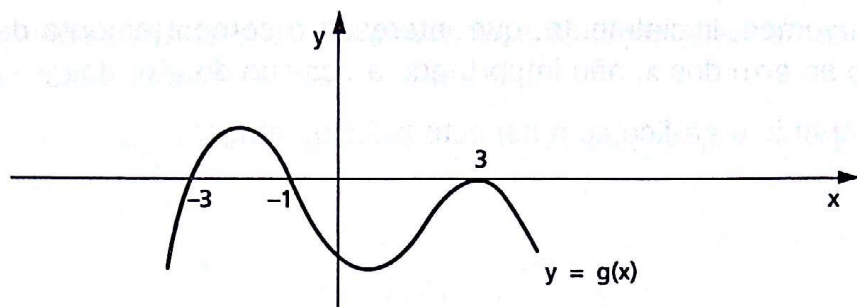
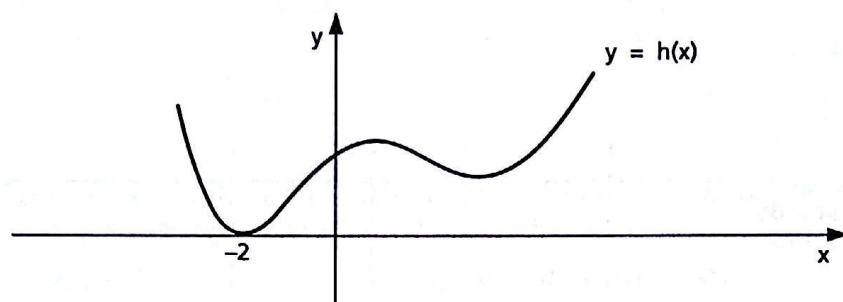
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$ ou $x = 7$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 7$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $4 < x < 7$.

EXERCÍCIOS

199. Estude o sinal das funções cujos gráficos estão representados abaixo.

a)

b)

c)

XII. Sinal da função afim

93. Considerando que $x = -\dfrac{b}{a}$, zero da função afim $f(x) = ax + b$, é o valor de x para o qual $f(x) = 0$, examinemos, então, para que valores ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

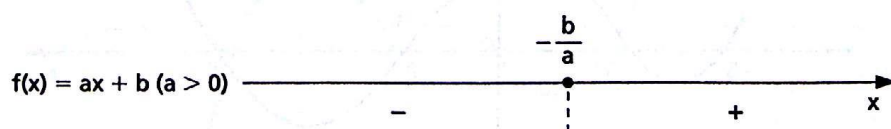
Devemos considerar dois casos.

1º caso: $a > 0$

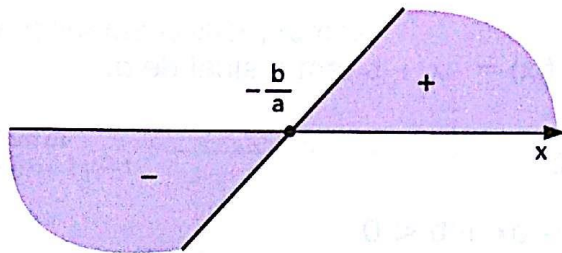
$$f(x) = ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = ax + b < 0 \iff ax < -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

Colocando os valores de x sobre um eixo, o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, é:

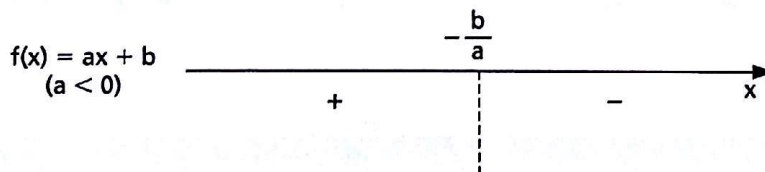
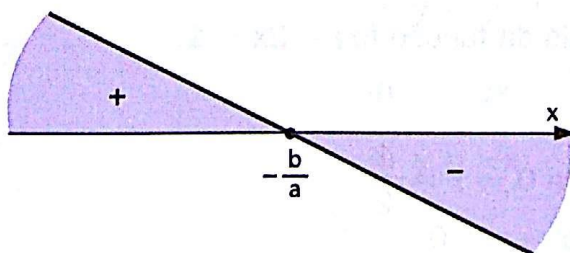
$f(x) = ax + b\ (a > 0)$ — $-\dfrac{b}{a}$ — $+$ — x

Outro processo para analisarmos a variação do sinal da função afim é construir o gráfico cartesiano.

Lembremos que na função afim $f(x) = ax + b$ o gráfico cartesiano é uma reta e, se o coeficiente angular *a* é positivo, a função é crescente.

Construindo o gráfico de $f(x) = ax + b$ com $a > 0$, e lembrando que não importa a posição do eixo *y*, temos:

2º caso: $a < 0$

$f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

$f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$

Colocando os valores de *x* sobre um eixo, o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a < 0$, é:

Podemos analisar o sinal da função $f(x) = ax + b$, com $a < 0$, construindo o gráfico cartesiano. Lembremos que neste caso a função é decrescente.

Resumo

I) A função afim $f(x) = ax + b$ anula-se para $x = -\dfrac{b}{a}$.

II) Para $x > -\dfrac{b}{a}$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } a > 0 \text{ então } f(x) = ax + b > 0 \\ \text{se } a < 0 \text{ então } f(x) = ax + b < 0 \end{cases}$$

isto é, para $x > -\dfrac{b}{a}$ a função $f(x) = ax + b$ tem o sinal de *a*.

III) Para $x < -\dfrac{b}{a}$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } a > 0 \text{ então } f(x) = ax + b < 0 \\ \text{se } a < 0 \text{ então } f(x) = ax + b > 0 \end{cases}$$

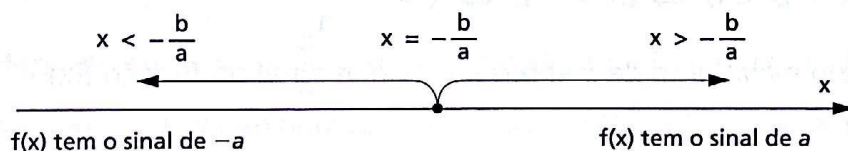
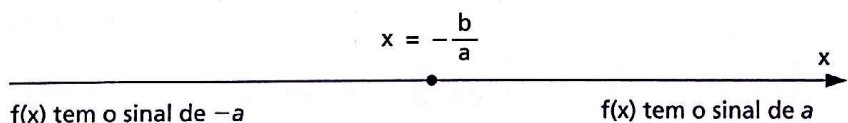
isto é, para $x < -\dfrac{b}{a}$ a função $f(x) = ax + b$ tem o sinal de $-a$ (sinal contrário ao de *a*).

Se colocarmos os valores de *x* sobre um eixo, a regra dos sinais da função afim pode ser assim representada:

$x < -\dfrac{b}{a}$ $x = -\dfrac{b}{a}$ $x > -\dfrac{b}{a}$ x

f(x) tem o sinal de $-a$ f(x) tem o sinal de *a*

ou, simplesmente:

$x = -\dfrac{b}{a}$ x

f(x) tem o sinal de $-a$ f(x) tem o sinal de *a*

Exemplos:

1º) Estudar os sinais da função $f(x) = 2x - 1$.

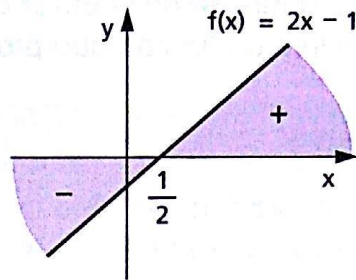
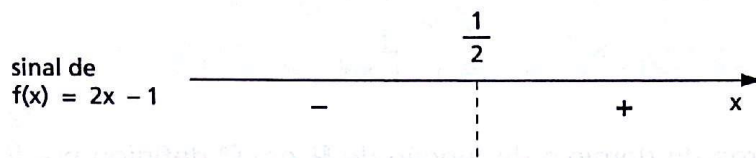
Temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$a = 2 \Rightarrow a > 0$ e $-a < 0$.

Logo:

para $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de a)

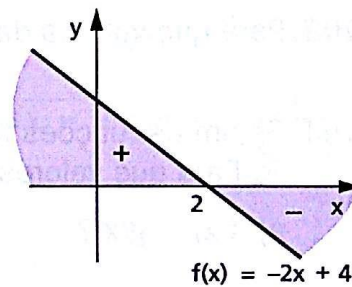
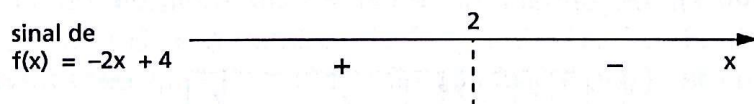
para $x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de $-a$)

Fazendo o esquema gráfico, temos:

2º) Estudar os sinais da função $f(x) = -2x + 4$.

Temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$a = -2 \Rightarrow a < 0$ e $-a > 0$.

Para $x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de a)

Para $x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de $-a$)

Fazendo o esquema gráfico, temos:

EXERCÍCIOS

200. Estude os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 3$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = 4 - x$

d) $y = 5 + x$

e) $y = 3 - \frac{x}{2}$

f) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$

g) $y = 2x - \frac{4}{3}$

h) $y = -x$

201. Seja a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2.

Solução

Os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2 são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$4x - 5 > 2$$

e, portanto,

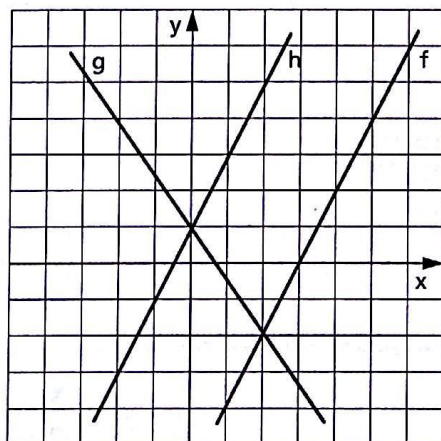
$$x > \frac{7}{4}.$$

202. Para que valores do domínio da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2}$ a imagem é menor que 4?

203. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{2}$ é negativa?

204. Sejam as funções $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \dfrac{4x - 1}{2}$ definidas em $\mathbb{R}$. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $f(x) \geqslant g(x)$?   b) $g(x) < h(x)$?   c) $f(x) \geqslant h(x)$?

205. Dados os gráficos das funções *f*, *g* e *h* definidas em $\mathbb{R}$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) > g(x)$

b) $g(x) \leqslant h(x)$

c) $f(x) \geqslant h(x)$

d) $g(x) > 4$

e) $f(x) \leqslant 0$

XIII. Inequações

94. Definição

Sejam as funções f(x) e g(x) cujos domínios são respectivamente $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$. Chamamos **inequação** na incógnita *x* a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:

$$f(x) > g(x)$$
$$f(x) < g(x)$$
$$f(x) \geqslant g(x)$$
$$f(x) \leqslant g(x)$$

Exemplos:

1º) $2x - 4 > x$ é uma inequação em que $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = x$.

2º) $3x - 5 < 2$ é uma inequação em que $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2$.

3º) $x^2 - 3 \geqslant \frac{1}{x}$ é uma inequação em que $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

4º) $\sqrt{x - 2} \leqslant \frac{1}{x - 3}$ é uma inequação em que $f(x) = \sqrt{x - 2}$ e $g(x) = \frac{1}{x - 3}$.

95. Domínio de validade

Chamamos de **domínio de validade** da inequação $f(x) < g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$, em que D_1 é o domínio da função *f* e D_2 é o domínio da função *g*. É evidente que, para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \Leftrightarrow (x_0 \in D_1 \text{ e } x_0 \in D_2) \Leftrightarrow (f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ e } g(x_0) \in \mathbb{R}).$$

Nos exemplos anteriores, temos:

1º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

2º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

3º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$

4º) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 3\}$

96. Solução

O número real x_0 é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$.

Exemplo:

O número real 3 é solução da inequação $2x + 1 > x + 3$, pois

$$\underbrace{2 \cdot 3 + 1}_{f(3)} > \underbrace{3 + 3}_{g(3)}$$

é uma sentença verdadeira.

97. Conjunto solução

Ao conjunto S de todos os números reais *x* tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira chamamos de **conjunto solução** da inequação.

Exemplo:

A inequação $2x + 1 > x + 3$ tem o conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, isto é, para qualquer $x_0 \in S$ a sentença $2x_0 + 1 > x_0 + 3$ é verdadeira.

Se não existir o número real *x* tal que a sentença $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, diremos que a inequação $f(x) > g(x)$ é impossível e indicaremos o conjunto solução por $S = \varnothing$.

Exemplo:

O conjunto solução da inequação $x + 1 > x + 2$ é $S = \varnothing$, pois não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a sentença $x_0 + 1 > x_0 + 2$ seja verdadeira.

Resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto solução. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$, então x_0 é tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}$, isto é, $x_0 \in D$ (domínio de validade da inequação). Assim sendo, temos:

$$x_0 \in S \Rightarrow x_0 \in D$$

ou seja, o conjunto solução é sempre subconjunto do domínio de validade da inequação.

98. Inequação equivalente

Duas inequações são **equivalentes em** $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}$ se o conjunto solução da primeira é igual ao conjunto solução da segunda.

Exemplos:

1º) $3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois o conjunto solução de ambas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

2º) $x < 1$ e $x^2 < 1$ não são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois $x_0 = -2$ é solução da primeira inequação mas não o é da segunda.

99. Princípios de equivalência

Na resolução de uma inequação procuramos sempre transformá-la em outra equivalente e mais "simples", em que o conjunto solução possa ser obtido com maior facilidade. Surge, então, a pergunta: "Que transformações podem ser feitas em uma inequação para se obter uma inequação equivalente?". A resposta a essa pergunta são os dois princípios seguintes:

P-1) Sejam as funções f(x) e g(x) definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função h(x) é definida em $D_1 \cap D_2$, as inequações

$$f(x) < g(x) \quad \text{e} \quad f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos:

Seja a inequação

$$\underbrace{3x - 1}_{f(x)} > \underbrace{2x + 3}_{g(x)} \quad \textbf{(1)}$$

adicionemos $h(x) = -2x + 1$ aos dois membros:

$$\underbrace{(3x - 1)}_{f(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)} > \underbrace{(2x + 3)}_{g(x)} + \underbrace{(-2x + 1)}_{h(x)} \quad \textbf{(2)}$$

façamos as simplificações possíveis:

$$\underbrace{x}_{f(x) + h(x)} > \underbrace{4}_{g(x) + h(x)}$$

portanto, como **(1)** é equivalente a **(2)** temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

Na prática, aplicamos a propriedade **P-1** com o seguinte enunciado: "Em uma inequação, podemos transpor um termo de um membro para outro trocando o sinal do termo considerado":

$$f(x) + h(x) < g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) - h(x).$$

Assim, no exemplo anterior, teríamos:

$$3x - 1 > 2x + 3 \Rightarrow 3x - 1 - 2x > 3 \Rightarrow x > 3 + 1 \Rightarrow x > 4$$

P-2) Sejam as funções f(x) e g(x) definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função h(x) é definida em $D_1 \cap D_2$, e tem sinal constante, então:

a) se $h(x) > 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

b) se $h(x) < 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos:

1º) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ e $6x - 9 > 4$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda inequação foi obtida a partir da primeira por meio de uma multiplicação por 12.

2º) $-2x^2 + 3x > 1$ e $2x^2 - 3x < -1$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda foi obtida da primeira por meio de uma multiplicação por -1 e inversão do sentido da desigualdade.

3º) $\frac{4x - 3}{x^2 + 1} > 0$ e $4x - 3 > 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$. Notemos que a segunda foi obtida da primeira por meio da multiplicação por $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Na prática, aplicamos a propriedade **P-2** com o seguinte enunciado: "Em uma inequação, podemos multiplicar os dois membros pela mesma expressão, mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente".

EXERCÍCIOS

206. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $4x + 5 > 2x - 3$

b) $5(x + 3) - 2(x + 1) \leq 2x + 3$

c) $3(x + 1) - 2 \geq 5(x - 1) - 3(2x - 1)$

207. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geqslant x$$

Solução

A inequação é equivalente àquela que se obtém multiplicando pelo mmc (3, 2) = 6.

$$2(x+2) - 3(x-1) \geqslant 6x$$

Efetuando as operações, temos:

$$-x + 7 \geqslant 6x$$

ou ainda:

$$-7x \geqslant -7$$

Dividindo ambos os membros por -7 e lembrando que devemos inverter a desigualdade, temos

$$x \leqslant 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$$

208. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} \geqslant 1$

b) $\frac{2x-3}{2} - \frac{5-3x}{3} < 3x - \frac{1}{6}$

c) $(3x+1)(2x+1) \leqslant (2x-1)(3x+2) - (4-5x)$

d) $(3x-2)^2 - (3x-1)^2 > (x+2)^2 - (x-1)^2$

e) $4(x-2) - (3x+2) > 5x - 6 - 4(x-1)$

f) $6(x+2) - 2(3x+2) > 2(3x-1) - 3(2x+1)$

209. Numa escola é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a da última prova é multiplicada por 3. Os resultados, após ser adicionados, são divididos por 6. Se a média obtida por esse critério for maior ou igual a 6,5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno teria tirado 6,3 na primeira prova e 4,5 na segunda. Quanto precisará tirar na terceira para ser dispensado da recuperação?

210. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 2$$

Solução

A inequação proposta é equivalente a $\frac{2x - 3}{x - 1} - 2 \leqslant 0$, que, reduzindo ao mesmo denominador, obtemos $\frac{-1}{x - 1} \leqslant 0$.

Notemos que a fração $\frac{-1}{x - 1}$ deverá ser não positiva; como o numerador -1 é negativo, então o denominador $x - 1$ deverá ser positivo.

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

211. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{3x - 2}{1 - x} \leqslant -3$ b) $\frac{4x - 5}{2x - 1} \geqslant 2$ c) $\frac{-4 - 3x}{3x + 2} < -1$

XIV. Inequações simultâneas

100. A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em *x*, separadas pelo conectivo *e*:

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x) & \textbf{(1)} \\ \quad \text{e} & \\ g(x) < h(x) & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto solução de **(1)** e S_2 o conjunto solução de **(2)**, o conjunto solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo:

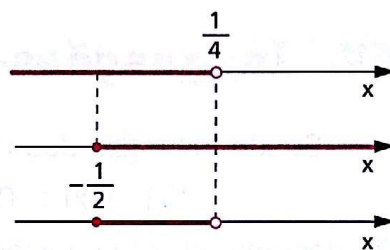
Resolver $\underbrace{3x + 2 < \overbrace{-x + 3}^{}}_{(1)}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\overbrace{ \leqslant x + 4}^{(2)}.$

Temos que resolver duas inequações:

(1) $3x + 2 < -x + 3 \Rightarrow 4x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$

(2) $-x + 3 \leqslant x + 4 \Rightarrow -2x \leqslant 1 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$

A interseção desses dois conjuntos é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{4}\right\}.$

EXERCÍCIOS

212. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$

b) $-4 < 4 - 2x \leqslant 3$

c) $-3 < 3x - 2 < x$

d) $x + 1 \leqslant 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$

e) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$

f) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

213. Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3 - 2x \leqslant 1 \\ 3x - 1 \leqslant 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leqslant 2x - 5 \end{cases}$

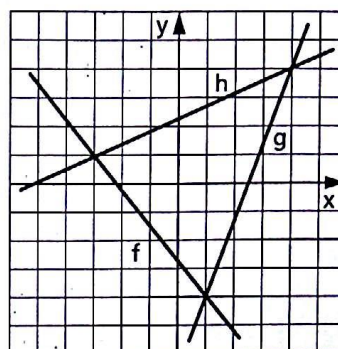
c) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 2 < 7 - 2x \\ 48x < 3x + 10 \\ 11 - 2(x - 3) > 1 - 3(x - 5) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5}{1 - x} \leqslant -2 \\ \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \end{cases}$

214. Com base nos gráficos das funções f, g e h definidas em $\mathbb{R}$, determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) < g(x) \leq h(x)$
b) $g(x) \leq f(x) < h(x)$
c) $h(x) \leq f(x) < g(x)$

XV. Inequações-produto

Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações

$$f(x) \cdot g(x) > 0,\ f(x) \cdot g(x) < 0,\ f(x) \cdot g(x) \geq 0 \ \text{ e } \ f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

são denominadas **inequações-produto**.

101. Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.

Assim, são possíveis dois casos:

1º) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto solução do sistema.

2º) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos soluções dessas inequações, então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto solução do sistema.

Daí concluímos que o conjunto solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação:

$$f(x) \cdot g(x) < 0.$$

Exemplo:

Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$.

Analisemos os dois casos possíveis:

1º caso

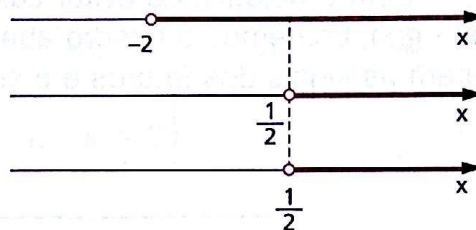
Cada um dos fatores é positivo, isto é:

$x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2$

e $\qquad$ e

$2x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2}$

A interseção das duas soluções é:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$$

2º caso

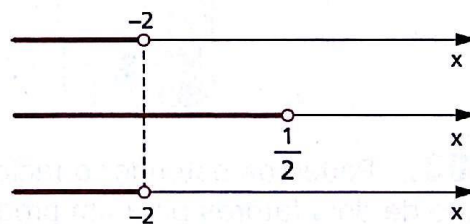
Cada um dos fatores é negativo, isto é:

$x + 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2$

e $\qquad$ e

$2x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{2}$

A interseção das duas soluções é:

$$S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

O conjunto solução da inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{2}\right\}$$

102. Quadro de sinais

Vejamos um outro processo, mais prático, para resolvermos a inequação $(x + 2)(2x - 1) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Fazemos inicialmente o estudo dos sinais das funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = 2x - 1$.

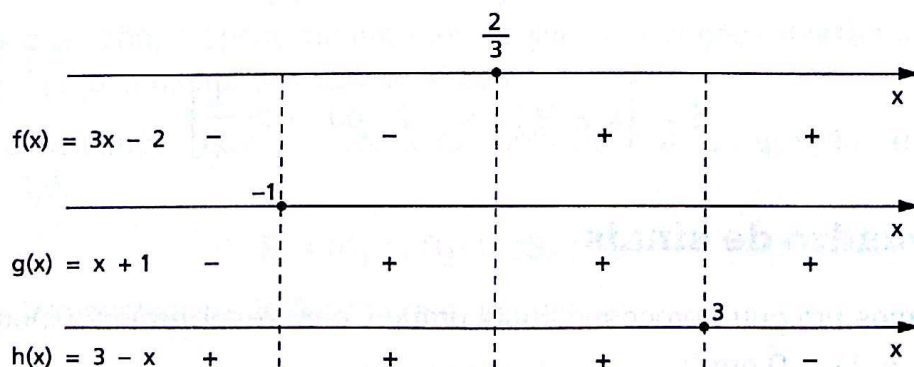
Com o objetivo de evitar cálculos algébricos no estudo dos sinais do produto $f(x) \cdot g(x)$, usaremos o quadro abaixo, que denominamos **quadro-produto**, no qual figuram os sinais dos fatores e o sinal do produto.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{2}\right\}$$

103. Podemos estender o raciocínio empregado no estudo dos sinais de um produto de dois fatores para um produto com mais de dois fatores.

Exemplo:

Resolver a inequação $(3x - 2)(x + 1)(3 - x) < 0$ em $\mathbb{R}$.

Analisando os sinais dos fatores, temos:

Vamos, agora, construir o quadro-produto:

		-1		$\frac{2}{3}$		3		x
f(x)	−		−		+		+	
g(x)	−		+		+		+	
h(x)	+		+		+		−	
f(x) · g(x) · h(x)	+		−		+		−	

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x > 3\right\}$$

104. A inequação $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ tem por conjunto solução S a reunião do conjunto solução S_1 da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ com o conjunto solução S_2 da equação $f(x) \cdot g(x) = 0$, isto é:

$$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \cdot g(x) = 0 \end{cases}$$

Exemplo:

Resolver a inequação $(3x + 1)(2x - 5) \geqslant 0$ em $\mathbb{R}$.

A inequação $(3x + 1)(2x - 5) \geqslant 0$ é equivalente a:

$$\begin{cases} (3x + 1) \cdot (2x - 5) > 0 \quad \mathbf{(1)} \\ \text{ou} \\ (3x + 1) \cdot (2x - 5) = 0 \quad \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Resolvendo **(1)**, temos $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x > \frac{5}{2}\right\}$.

Resolvendo **(2)**, temos $S_2 = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x > \frac{5}{2}\right\} \cup \left\{-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right\}$$

ou seja:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$$

Se recorrêssemos ao quadro-produto, teríamos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$$

105. Dentre as inequações-produto, são importantes as inequações:
$[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geqslant 0$ e $[f(x)]^n \leqslant 0$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.

Para resolvermos essas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1ª) "Toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base", isto é:

$$\begin{array}{l} a^{2n+1} > 0 \iff a > 0 \\ a^{2n+1} = 0 \iff a = 0 \\ a^{2n+1} < 0 \iff a < 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

2ª) "Toda potência de base real e expoente par é um número não negativo", isto é:

$$a^{2n} \geqslant 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim sendo, temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \iff \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \nexists x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall\, x \in D(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplos:

1º) $(3x - 2)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

2º) $(4x - 3)^6 > 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4}\right\}$

3º) $(2x + 1)^5 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

4º) $(x - 2)^4 < 0 \quad \Rightarrow \quad S = \varnothing$

5º) $(3 - 5x)^7 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 5x \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{5}\right\}$

6º) $(4x - 5)^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad S = \mathbb{R}$

7º) $(8 - 2x)^4 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \{4\}$

EXERCÍCIOS

215. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$

b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$

c) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$

d) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$

e) $(6x - 1)(2x + 7) \geqslant 0$

f) $(5 - 2x)(-7x - 2) \leqslant 0$

g) $(3 - 2x)(4x + 1)(5x + 3) \geqslant 0$

h) $(5 - 3x)(7 - 2x)(1 - 4x) \leqslant 0$

216. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(x - 3)^4 > 0$

b) $(3x + 8)^3 < 0$

c) $(4 - 5x)^6 < 0$

d) $(1 - 7x)^5 > 0$

e) $(3x + 5)^2 \geqslant 0$

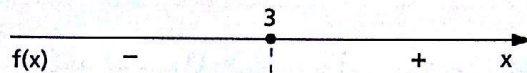
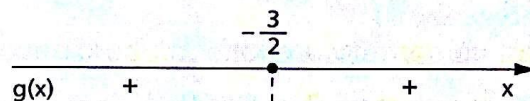
f) $(5x + 1)^3 \leqslant 0$

g) $(4 + 3x)^4 \leqslant 0$

h) $(3x - 8)^5 \geqslant 0$

217. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 3)^5 \cdot (2x + 3)^6 < 0$.

Solução

Estudemos separadamente os sinais das funções $f(x) = (x - 3)^5$ e $g(x) = (2x + 3)^6$. Lembrando que a potência de expoente ímpar e base real tem o sinal da base, então o sinal de $(x - 3)^5$ é igual ao sinal de $x - 3$, isto é:

A potência de expoente par e base real não nula é sempre positiva, então $(2x + 3)^6$ é positivo se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x + 3)^6$ é nulo se $x = -\frac{3}{2}$, isto é:

Fazendo o quadro-produto, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \quad \text{e} \quad x \neq -\frac{3}{2}\right\}$$

218. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(5x + 4)^4 \cdot (7x - 2)^3 \geqslant 0$

b) $(3x + 1)^3 \cdot (2 - 5x)^5 \cdot (x + 4)^8 > 0$

c) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leqslant 0$

d) $(5x - 1) \cdot (2x + 6)^8 \cdot (4 - 6x)^6 \geqslant 0$

219. Determine, em $\mathbb{R}$, a solução da inequação $(3x - 2)^3 \cdot (x - 5)^2 \cdot (2 - x)x > 0$.

XVI. Inequações-quociente

106. Sendo f(x) e g(x) duas funções na variável x, as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \text{ e } \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

são denominadas **inequações-quociente.**

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos, então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

Exemplo:

Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $\dfrac{3x+4}{1-x} \leqslant 2$. Temos:

$$\frac{3x+4}{1-x} \leqslant 2 \Rightarrow \frac{3x+4}{1-x} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3x+4-2(1-x)}{1-x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{5x+2}{1-x} \leqslant 0$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

	$x < -\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5} < x < 1$	$x > 1$
f(x) = 5x + 2	−	+	+
g(x) = 1 − x	+	+	−
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	−	+	−

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$$

Podemos resolver a inequação $\dfrac{3x+4}{1-x} \leqslant 2$ multiplicando por $h(x) = 1 - x$ e examinando dois casos:

1º) $h(x) = 1 - x > 0$, isto é, $x < 1$

$$\frac{3x+4}{1-x} \leqslant 2 \Rightarrow 3x + 4 \leqslant 2(1-x) \Rightarrow x \leqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5}\right\}$$

2º) $h(x) = 1 - x < 0$, isto é, $x > 1$

$$\frac{3x+4}{1-x} \leqslant 2 \Rightarrow 3x + 4 \geqslant 2(1-x) \Rightarrow x \geqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cap \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{5}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$$

Daremos sempre preferência ao método do quadro-quociente, por sua maior simplicidade.

EXERCÍCIOS

220. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{2x+1}{x+2} > 0$ b) $\frac{3x-2}{3-2x} < 0$ c) $\frac{3-4x}{5x+1} \geqslant 0$ d) $\frac{-3-2x}{3x+1} \leqslant 0$

221. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{5x-3}{3x-4} > -1$ c) $\frac{6x}{x+3} < 5$ e) $\frac{3x-5}{2x-4} \leqslant 1$

b) $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 3$ d) $\frac{5x-2}{3x+4} < 2$ f) $\frac{x+1}{x-2} \geqslant 4$

222. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\frac{(1-2x)(3+4x)}{(4-x)} > 0$ c) $\frac{(5x+4)(4x+1)}{(5-4x)} \geqslant 0$

b) $\frac{(3x+1)}{(2x+5)(5x+3)} < 0$ d) $\frac{(1-2x)}{(5-x)(3-x)} \leqslant 0$

223. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{1}{x-4} < \frac{2}{x+3}$ e) $\frac{5x+2}{4x-1} > \frac{5x-1}{4x+5}$

b) $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x-2}$ f) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} < 0$

c) $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$ g) $\frac{2}{3x-1} \geqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

d) $\frac{x+5}{3x+2} \leqslant \frac{x-2}{3x+5}$

224. Ache os valores reais de *x* para os quais vale a desigualdade:

$-\frac{4}{x} + \frac{3}{2} \geqslant -\frac{1}{x}$.

Funções quadráticas

I. Definição

107. Uma aplicação *f* de ℝ em ℝ recebe o nome de **função quadrática** ou **do 2º grau** quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que *a*, *b* e *c* são números reais dados e $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Exemplos de funções quadráticas:

1º) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ em que $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$
2º) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ em que $a = 2$, $b = 4$, $c = -3$
3º) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ em que $a = -3$, $b = 5$, $c = -1$
4º) $f(x) = x^2 - 4$ em que $a = 1$, $b = 0$, $c = -4$
5º) $f(x) = -2x^2 + 5x$ em que $a = -2$, $b = 5$, $c = 0$
6º) $f(x) = -3x^2$ em que $a = -3$, $b = 0$, $c = 0$

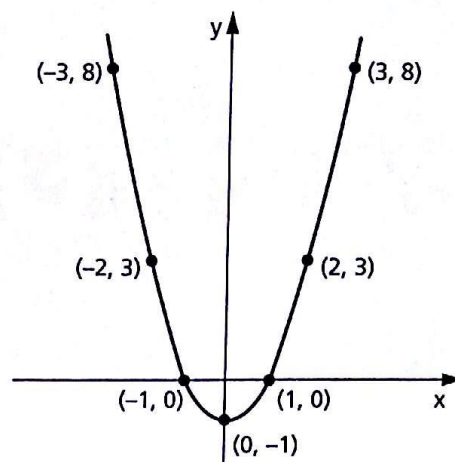
II. Gráfico

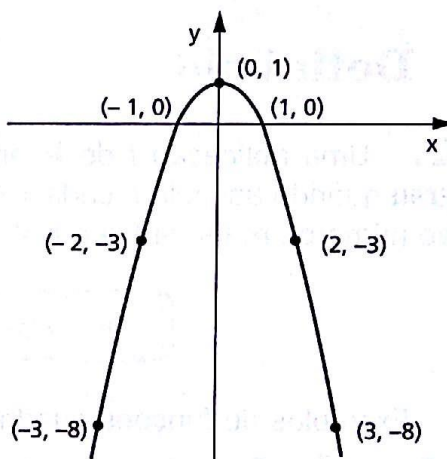
108. O gráfico da função quadrática é uma parábola.(*)

(*) Isso é provado no volume de Geometria Analítica desta coleção.

Exemplos:

1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

x	$y = x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8

2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

x	$y = -x^2 + 1$
−3	−8
−2	−3
−1	0
0	1
1	0
2	−3
3	−8

EXERCÍCIOS

225. Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2$

b) $y = -x^2$

c) $y = 2x^2$

d) $y = -2x^2$

e) $y = x^2 - 2x$

f) $y = -2x^2 - 4x$

g) $y = -3x^2 - 3$

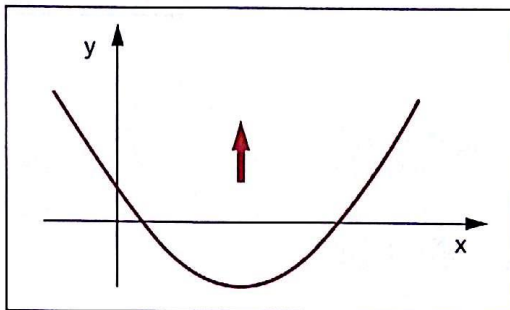
h) $y = x^2 - 2x + 4$

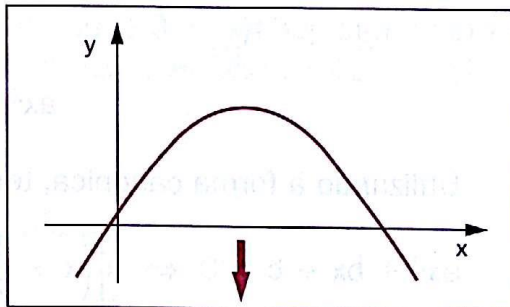
226. Em que condições a função quadrática $y = (m^2 - 4)x^2 - (m + 2)x - 1$ está definida?

227. Determine uma função quadrática tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$.

228. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, determine o produto abc.

III. Concavidade

109. A parábola representativa da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo".

Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

IV. Forma canônica

110. A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores *x* e *y*, como foi feito no item anterior, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a *x* alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinada função quadrática os valores de abscissa (valores de *x*), em que a parábola intercepta o eixo dos *x* ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada, não são inteiros.

Para iniciarmos um estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos primeiramente transformá-la em outra forma mais conveniente, chamada **forma canônica**.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica.

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

V. Zeros

111. Os **zeros** ou **raízes** da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

112. Número de raízes

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3º) $\Delta < 0$, sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

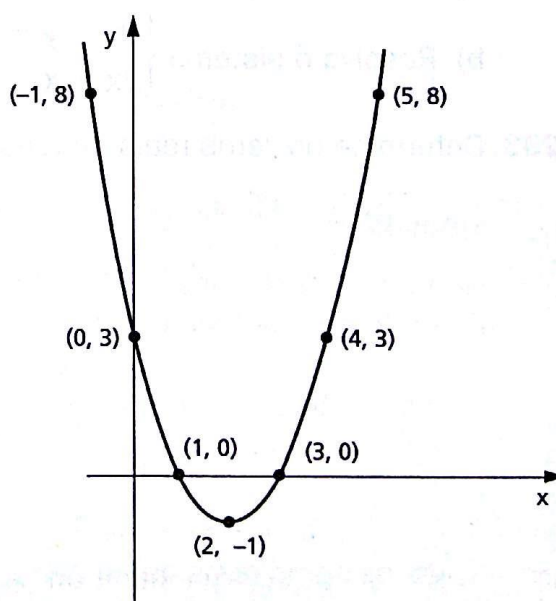
Resumo

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existem raízes reais.} \end{cases}$$

113. Significado geométrico das raízes

Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos *x*.

Exemplo:

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos *x* nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

EXERCÍCIOS

229. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$

j) $(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$

k) $f(x) = 2x^2 - 4x$

l) $f(x) = -3x^2 + 6$

m) $f(x) = 4x^2 + 3$

n) $f(x) = -5x^2$

230. Uma empresa produz e vende determinado tipo de produto. A quantidade que ela consegue vender varia conforme o preço, da seguinte forma: a um preço *y* ela consegue vender *x* unidades do produto, de acordo com a equação $y = 50 - \frac{x}{2}$. Sabendo que a receita (quantidade vendida vezes o preço de venda) obtida foi de R$ 1 250,00, qual foi a quantidade vendida?

231. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

232. a) Resolva a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$.

b) Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x + xy = -8 \end{cases}$

233. Determine os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Solução

Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.
Fazendo a substituição $z = x^2$, vem:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cuja solução é $z = 4$ ou $z = -1$, mas $z = x^2$; então:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

e

$$x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

Logo, os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x = 2$ e $x = -2$.

234. Determine os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$

c) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

e) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$

f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 3$

g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$

h) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

235. Determine os valores de *m* para que a função quadrática
$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

Solução

Na função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$, temos:

$$a = m,\ b = 2m - 1,\ c = m - 2 \text{ e } \Delta = 4m + 1$$

Considerando que a função é quadrática e os zeros são reais e distintos, então:

$$a = m \neq 0 \text{ e } \Delta = 4m + 1 > 0$$

ou seja:

$$m \neq 0 \text{ e } m > -\frac{1}{4}$$

236. Determine os valores de *m* para que a função quadrática
$f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

237. Determine os valores de *m* para que a equação do 2º grau
$(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

238. Determine os valores de *m* para que a função
$f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

239. Determine os valores de *m* para que a equação
$x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais.

240. Determine os valores de *m* para que a função
$f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$ não tenha zeros reais.

241. Determine os valores de *m* para que a equação
$mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ não tenha raízes reais.

242. O trinômio $ax^2 + bx + c$ tem duas raízes reais e distintas; α e β são dois números reais não nulos. O que se pode afirmar sobre as raízes do trinômio $\frac{a}{\alpha}x^2 + \beta bx + \alpha\beta^2 c$?

243. Mostre que na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2, temos para a soma S das raízes $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e para o produto P das raízes $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

244. Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$, de raízes x_1 e x_2, calcule:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $(x_1)^2 + (x_2)^2$

e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

f) $(x_1)^3 + (x_2)^3$

245. As raízes da equação $2x^2 - 2mx + 3 = 0$ são positivas e uma é o triplo da outra. Calcule o valor de *m*.

246. As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Calcule o módulo da diferença entre essas raízes.

247. Se *r* e *s* são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$, qual é o valor de $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$?

248. Determine o parâmetro *m* na equação $x^2 + mx + m^2 - m - 12 = 0$, de modo que ela tenha uma raiz nula e a outra positiva.

249. Dadas as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$, sabe-se que uma das raízes da segunda equação é o dobro de uma das raízes da primeira equação. Sendo $k \neq 0$, determine *k*.

250. Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$ em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

251. Obtenha uma equação do segundo grau de raízes:

a) 2 e -3

b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c) 0,4 e 5

d) 1 e $-\sqrt{2}$

e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

252. Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite as raízes reais não nulas x_1 e x_2, obtenha a equação de raízes:

a) $(x_1)^2$ e $(x_2)^2$

b) $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$

c) $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{x_2}{x_1}$

d) $(x_1)^3$ e $(x_2)^3$

253. Determine *m* na equação $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ para que se tenha $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação.

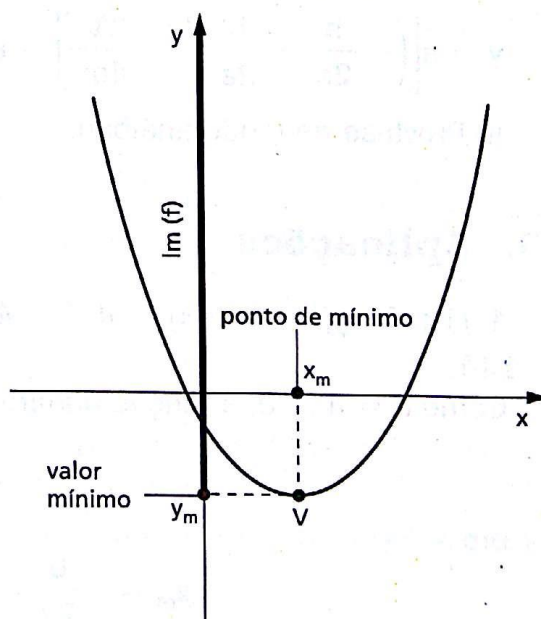
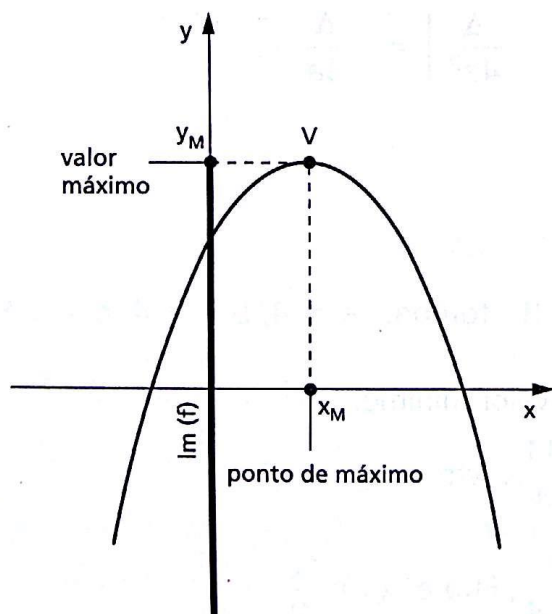
254. O trinômio $f(x) = x^2 - px + q$ tem por raízes *a* e *b*, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Qual é o trinômio cujas raízes são $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$?

255. Sejam *m* e *n* dois números inteiros positivos tais que *m* e *n* são ímpares consecutivos e $m \cdot n = 1599$. Indique o valor de $m + n$.

VI. Máximo e mínimo

114. Definições

Dizemos que o número $y_M \in Im(f)$ é o **valor máximo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geqslant y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_M \in D(f)$ tal que $y_M = f(x_M)$ é chamado **ponto de máximo** da função.

Dizemos que o número $y_m \in Im(f)$ é o **valor mínimo** da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leqslant y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_m \in D(f)$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado **ponto de mínimo** da função.

115. Teoremas

I) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\frac{b}{2a}$.

II) Se $a > 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Demonstração:

I) Consideremos a função quadrática na forma canônica:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \textbf{(1)}$$

Sendo $a < 0$, o valor de *y* será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de *x*; só depende de *a*, *b* e *c*) e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para todo *x* real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Para $x = -\frac{b}{2a}$, temos na expressão **(1)**:

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

II) Prova-se de modo análogo.

116. Aplicações

1ª) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$, temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

em

$$x_m = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 4}, \text{ isto é: } x_m = \frac{1}{2}$$

2ª) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$ e $\Delta = 4$.

Como $a = -1 < 0$, a função admite um valor máximo:

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)}, \text{ isto é: } y_M = 1$$

em

$$x_M = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)}, \text{ isto é: } x_M = \frac{1}{2}$$

VII. Vértice da parábola

117. O ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado **vértice** da parábola representativa da função quadrática.

EXERCÍCIOS

256. Determine os vértices das parábolas:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = -x^2 + 3x$

c) $y = 2x^2 - 5x + 2$

d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

e) $y = -x^2 + x - \frac{2}{9}$

f) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$

257. Determine o valor máximo ou o valor mínimo e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$.

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

f) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

258. Determine o valor de *m* na função real $f(x) = 3x^2 - 2x + m$ para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$.

259. Determine o valor de m na função real $f(x) = -3x^2 + 2(m - 1)x + (m + 1)$ para que o valor máximo seja 2.

260. Determine o valor de m na função real $f(x) = mx^2 + (m - 1)x + (m + 2)$ para que o valor máximo seja 2.

261. Determine o valor de m na função real $f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 1)x - m$ para que o valor mínimo seja 1.

262. Dentre todos os números reais de soma 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

Solução

Indicando por x e z esses números e por y o seu produto, temos:

$$x + z = 8 \qquad y = x \cdot z$$

Como precisamos ficar com apenas uma das variáveis, x ou z, fazemos:

$$x + z = 8 \quad \Rightarrow \quad z = 8 - x$$

e portanto:

$$y = x \cdot z \Rightarrow y = x(8 - x) \Rightarrow y = -x^2 + 8x$$

Como $a = -1 < 0$, y é máximo quando:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 4$$

Substituindo em $z = 8 - x$, vem $z = 4$.
Logo, os números procurados são 4 e 4.

263. Seja $y = -x^2 + 5x - 1$. Dado que x varia no intervalo fechado $[0, 6]$, determine o maior (y_M) e o menor (y_m) valor que y assume.

264. Dada $f(x) = 2x^2 + 7x - 15$, para que valor de x a função atinge um máximo?

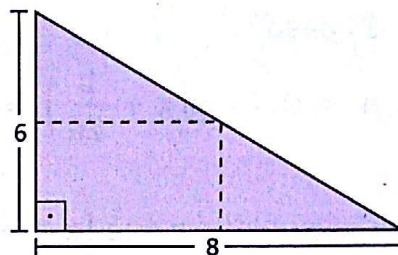
265. A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v.

266. Dentre todos os números reais x e z tais que $2x + z = 8$, determine aqueles cujo produto é máximo.

267. Dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine o de área máxima.

268. Dentre todos os números x e z de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

269. Determine o retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta $y = -4x + 5$.

270. É dada uma folha de cartolina como na figura ao lado. Cortando a folha na linha pontilhada resultará um retângulo. Determine esse retângulo, sabendo que a área é máxima.

271. Determine o retângulo de maior área contido num triângulo equilátero de lado 4 cm, estando a base do retângulo num lado do triângulo.

272. Num triângulo isósceles de base 6 cm e altura 4 cm está inscrito um retângulo. Determine o retângulo de área máxima, sabendo que a base do retângulo está sobre a base do triângulo.

273. Uma conta perfurada de um colar é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 6$. Do ponto P de coordenadas (4, 10) deixa-se a conta deslizar no arame até chegar ao ponto Q de ordenada -6. Qual é a distância horizontal percorrida pela conta (diferença entre as abscissas de P e Q)?

274. Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar 400 metros de tela de arame, de modo a produzir área máxima. Qual é o quociente de um lado pelo outro?

VIII. Imagem

118. Para determinarmos a imagem da função quadrática, tomemos inicialmente a função na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ou seja, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Obtemos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$; então temos que considerar dois casos:

1º caso

$a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant -\frac{\Delta}{4a}$$

2º caso

$a < 0 \Rightarrow a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$ e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leqslant -\frac{\Delta}{4a}$$

Resumindo:

$$a > 0 \Rightarrow y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ou ainda:

$$a > 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Exemplos:

1º) Obter a imagem da função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Na função: $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$,

temos:

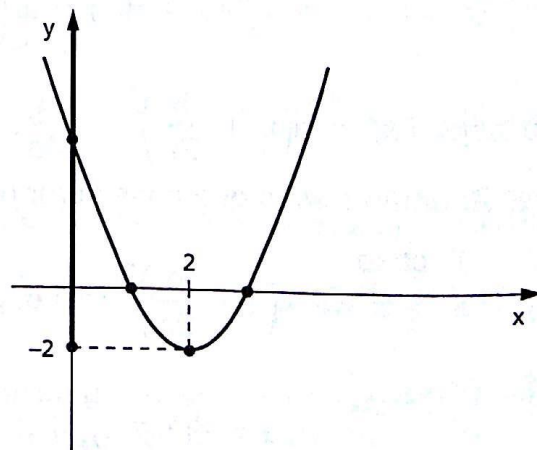
$a = 2$, $b = -8$ e $c = 6$

logo:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16$

e portanto: $-\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-16}{4 \cdot 2} = -2$.

Como $a = 2 > 0$, temos:

$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -2\}$

2º) Obter a imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}$.

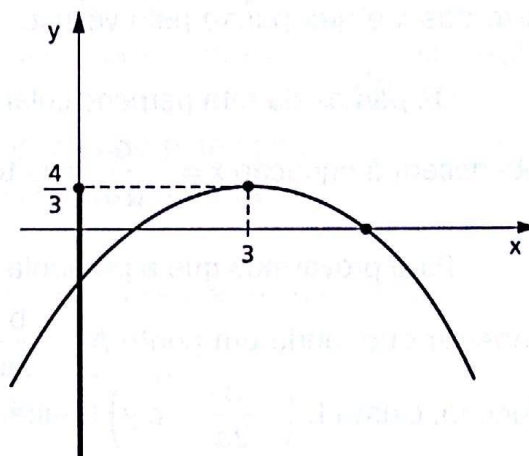
Na função $f(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - \frac{5}{3}$, temos:

$a = -\frac{1}{3}$, $b = 2$ e $c = -\frac{5}{3}$

logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

e portanto:

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-\frac{16}{9}}{4\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{4}{3}$$

Como $a = -\frac{1}{3} < 0$, temos:

$$\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{4}{3}\right\}$$

EXERCÍCIOS

275. Determine a imagem das funções definidas em $\mathbb{R}$.

a) $y = x^2 - 3x$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = 3x^2 - 9x + 6$

d) $y = -4x^2 + 8x + 12$

e) $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

f) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

276. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ definida em $\mathbb{R}$ para que a imagem seja $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

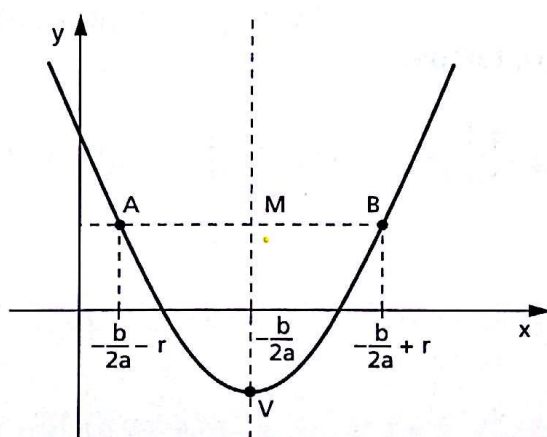
277. Determine m na função $f(x) = -\frac{x^2}{3} + mx - \frac{1}{2}$ definida em $\mathbb{R}$ para que a imagem seja $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 7\}$.

IX. Eixo de simetria

119. Teorema

"O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice."

Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x que passa pelo vértice da parábola obedecem à equação $x = -\frac{b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta têm abscissa $-\frac{b}{2a}$.

Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$, devemos mostrar que, dado um ponto $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B\left(-\frac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertencente ao gráfico da função.

Tomando a função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$$y = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right)$$

provando que $B\left(-\frac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertence ao gráfico da função.

X. Informações que auxiliam a construção do gráfico

120. Para fazermos o esboço do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, buscaremos, daqui para frente, informações preliminares, que são:

1ª) O gráfico é uma parábola, cujo eixo de simetria é a reta $x = -\dfrac{b}{2a}$ perpendicular ao eixo dos x.

2ª) Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

3ª) Zeros da função:

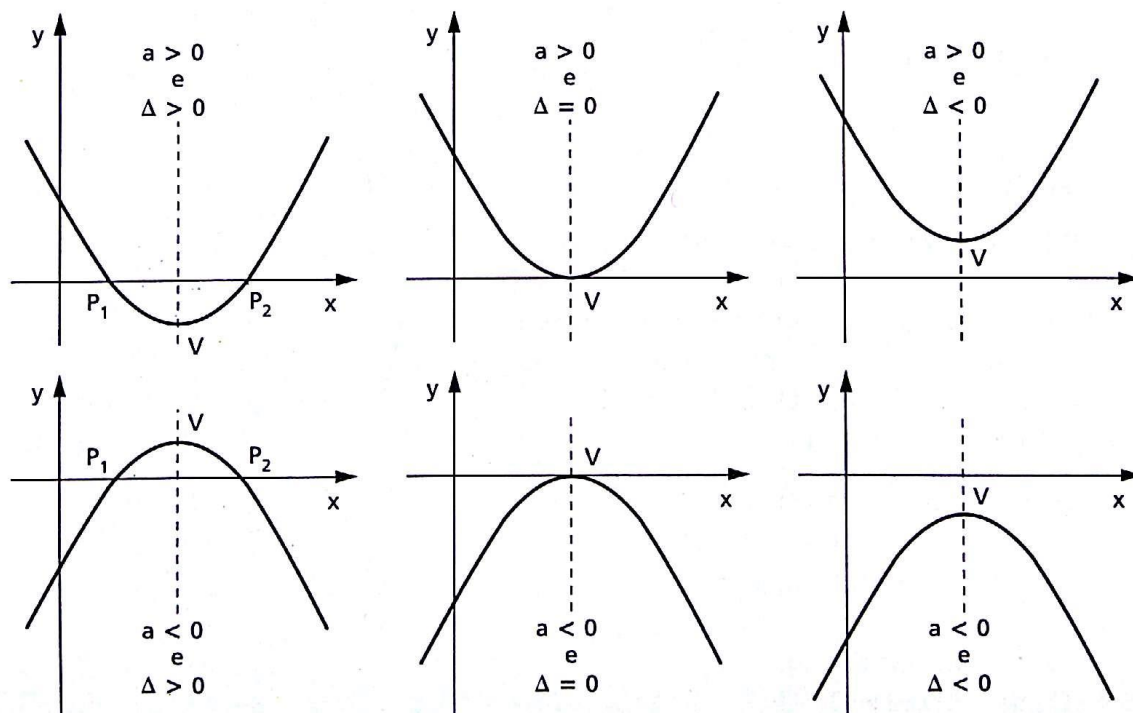
Se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos distintos:

$$P_1\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right).$$

Se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo dos x no ponto $P\left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$.

Se $\Delta < 0$, a parábola não tem pontos no eixo dos x.

4ª) Vértice da parábola é o ponto $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, que é máximo se $a < 0$ ou é mínimo se $a > 0$.

Seguem os tipos de gráfico que podemos obter:

EXERCÍCIOS

278. Faça o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução

Concavidade

Como $a = 1 > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Os pontos no eixo x são $P_1(1, 0)$ e $P_2(3, 0)$.

Vértice

Em $y = x^2 - 4x + 3$, temos:

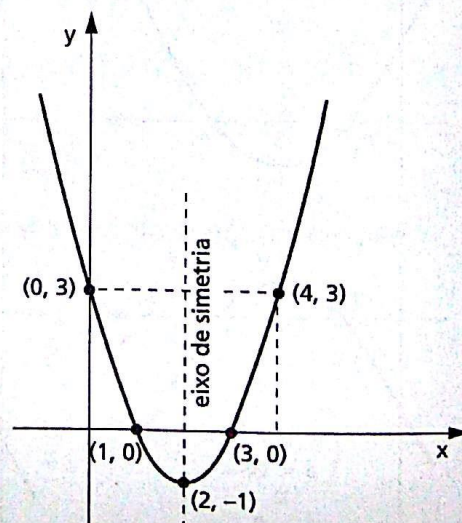
$a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $\Delta = 4$

Como $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2 \cdot 1} = 2$ e $-\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{4 \cdot 1} = -1$,

o vértice é $V(2, -1)$.

Gráfico

Observe que a parábola sempre intercepta o eixo y. Para determinarmos onde o faz, basta lembrar que o ponto situado no eixo y tem abscissa nula, logo $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, isto é, o ponto no eixo y é $(0, 3)$.

Determinado o ponto onde a parábola corta o eixo y, podemos determinar outro ponto $(4, 3)$ da parábola, simétrico a $(0, 3)$ em relação à reta $x = 2$ (eixo de simetria da parábola).

279. Faça o esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

Solução

Concavidade

Como $a = -1 < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

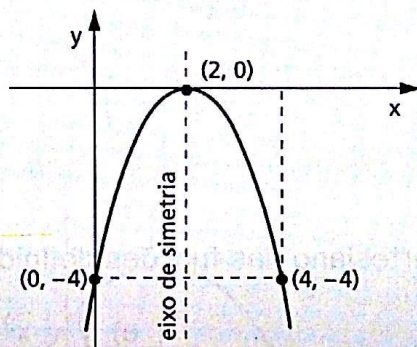
Zeros da função

$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

A parábola admite um único ponto no eixo x, que é $P = (2, 0)$.

Vértice

Considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x, então esse ponto é o vértice da parábola.

Gráfico

280. Faça o esboço do gráfico da função $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Solução

Concavidade

Como $a = \frac{1}{2} > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -1 < 0 \Rightarrow \nexists$ raízes reais.

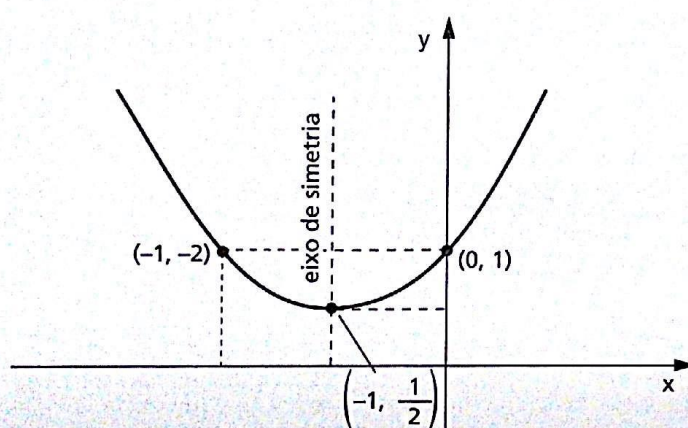
A parábola não tem pontos no eixo dos x.

Vértice

Em $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, temos:

$a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ e $\Delta = -1$.

Como $-\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ e $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, o vértice é $V\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Gráfico

281. Construa o gráfico cartesiano das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = 4x^2 - 10x + 4$

c) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

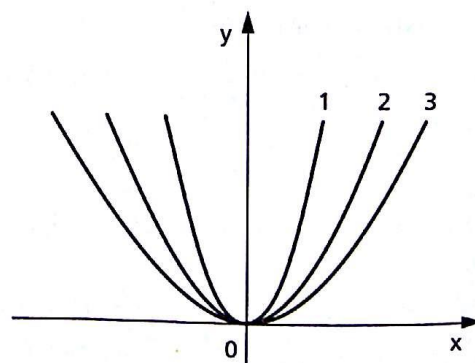
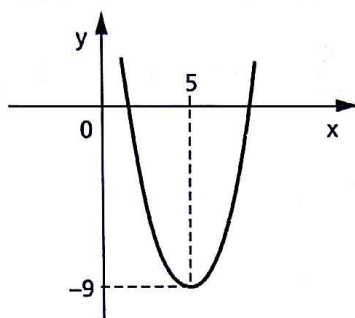
d) $y = -3x^2 + 6x - 3$

e) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$

f) $y = 3x^2 - 4x + 2$

g) $y = -x^2 + x - 1$

h) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

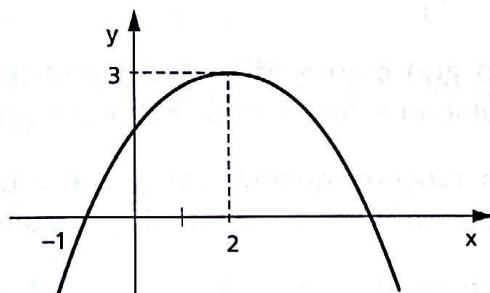
282. No gráfico ao lado estão representadas três parábolas, 1, 2 e 3, de equações, respectivamente, $y = ax^2$, $y = bx^2$ e $y = cx^2$. Qual é a relação entre *a*, *b* e *c*?

283. O gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 - 10x + c$ é o da figura:

Determine *a* e *c*.

Solução

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{2a} = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-100 + 4ac}{4a} = \frac{-100 + 4c}{4} = -9 \Rightarrow c = 16$$

Resposta: $a = 1$ e $c = 16$.

284. A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau.

Determine o trinômio.

Solução

$$x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow b^2 = 16a^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 3 \Rightarrow -(16a^2 - 4ac) = 12a$$

$$16a - 4c = -12 \Rightarrow 4a - c = -3 \quad \textbf{(2)}$$

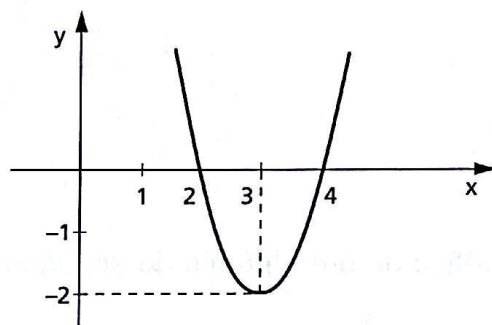
Como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4$ (já utilizado em **(1)**)

Temos, ainda: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -5 \Rightarrow c = -5a$ (por simetria, a outra raiz é 5). (3)

Substituindo (3) em (2), vem: $4a + 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

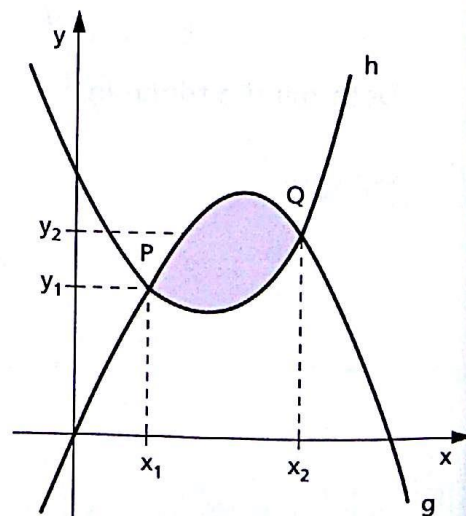
Portanto: $b = \frac{4}{3}$ e $c = \frac{5}{3}$.

Então, o trinômio é: $y = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

285. Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é dado abaixo, sendo a, b, c $\in \mathbb{R}$. Determine o valor de *a*.

286. Determine a função g(x) cujo gráfico é o simétrico do gráfico da função $f(x) = 2x - x^2$ em relação à reta $y = 3$. Esboce o gráfico.

287. Os gráficos de duas funções quadráticas *g* e *h* interceptam-se nos pontos $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, com $x_2 > x_1$, como mostra a figura.

Se $g(x) = ax^2 + bx + c$ e $h(x) = dx^2 + ex + f$, a área da região sombreada, na figura, é dada por $f(x_2) - f(x_1)$, em que $f(x) = \frac{d-a}{3} \cdot x^3 + \frac{e-b}{2} \cdot x^2 + (f-c)x$.

Nessas condições, qual é a área A da região sombreada, no caso em que $g(x) = x^2 + x$ e $h(x) = -x^2 - x + 4$?

XI. Sinal da função quadrática

121. Consideremos a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

e vamos resolver o problema: "para que valores de $x \in \mathbb{R}$ temos:

a) $f(x) > 0$; b) $f(x) < 0$; c) $f(x) = 0$?"

Resolver esse problema significa estudar o sinal da função quadrática para cada $x \in \mathbb{R}$.

Na determinação do sinal da função quadrática, devemos começar pelo cálculo do discriminante Δ, no qual três casos distintos podem aparecer:

a) $\Delta < 0$; b) $\Delta = 0$; c) $\Delta > 0$.

Vejamos como prosseguir em cada caso.

1º caso: $\Delta < 0$

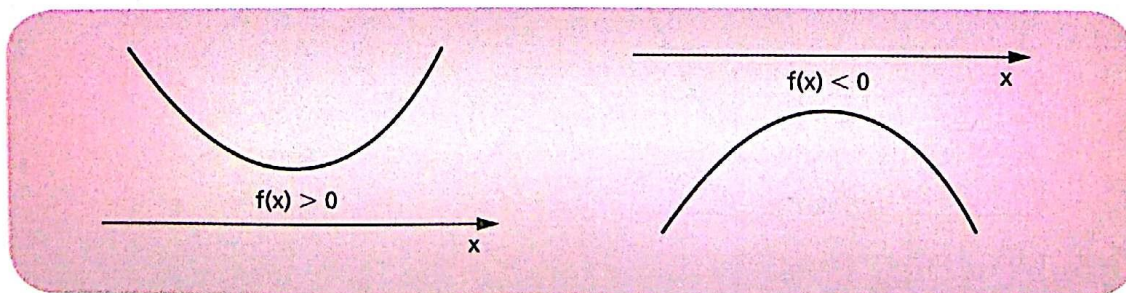
Se $\Delta < 0$, então $-\Delta > 0$.

Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{\text{positivo}} \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{(não negativo)}} + \underbrace{\left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right] \Rightarrow a \cdot f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, tem o sinal de *a* para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$a > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, vem confirmar a dedução algébrica.

Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

2º) $f(x) = -x^2 + x - 1$ apresenta $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ e, como $a = -1 < 0$, concluímos que:

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

2º caso: $\Delta = 0$

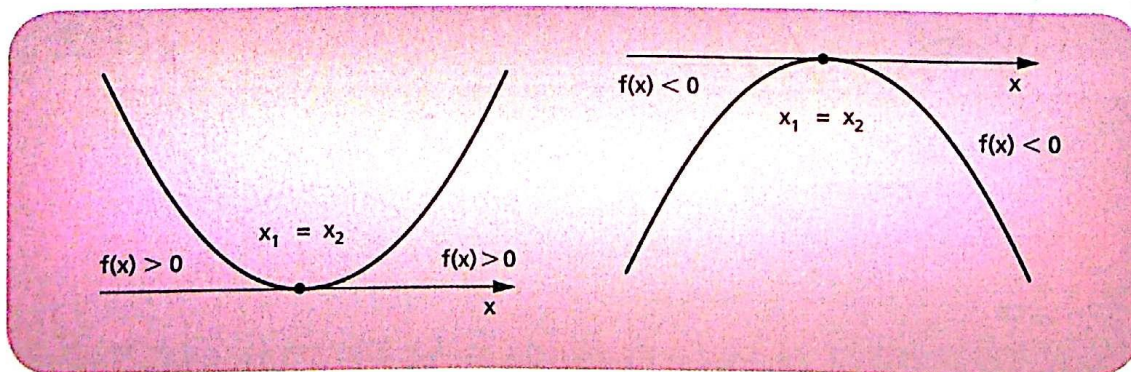
Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = \underset{\text{positivo}}{a^2} \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{(não negativo)}} - \underbrace{\left(\frac{0}{4a^2}\right)}_{\text{positivo}} \right] = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

então $a \cdot f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de *a* para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = -\frac{b}{2a}$ zero duplo de $f(x)$, ou melhor:

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$a < 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

A representação gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, vem confirmar a dedução algébrica.

Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$; então f(x) tem um zero duplo $x_1 = -\dfrac{b}{2a} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 \ \text{ se } \ x = 1 \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$ apresenta $\Delta = 8^2 - 4(-2) \cdot (-8) = 0$, então f(x) tem um zero duplo para $x_1 = -\dfrac{b}{2a} = 2$ e, como $a = -2 < 0$, concluímos:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = 0 \ \text{ se } \ x = 2 \end{cases}$$

3º caso: $\Delta > 0$

Da forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

Lembramos que a fórmula que dá as raízes de uma equação do segundo grau é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ isto é, } \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

fica evidente que a forma canônica se transforma em:

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a^2(x - x_1)(x - x_2)$$

O sinal de $a \cdot f(x)$ depende dos sinais dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$. Admitindo $x_1 < x_2$, temos que:

1) se $x < x_1$ (reta: x, x_1, x_2), temos:

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ \text{e} \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{+} \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{-}\underbrace{(x - x_2)}_{-} > 0$$

2) se $x_1 < x < x_2$ — (reta com x_1, x, x_2), temos:

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \quad e \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = \underset{\oplus}{a^2} \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\ominus} < 0$$

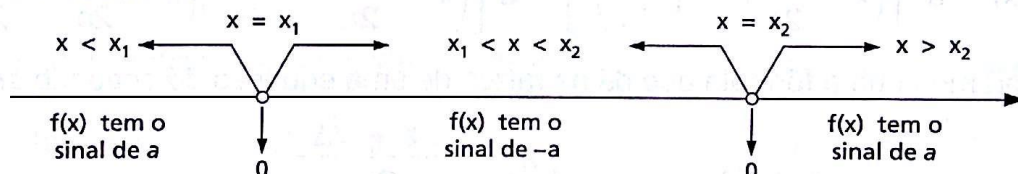
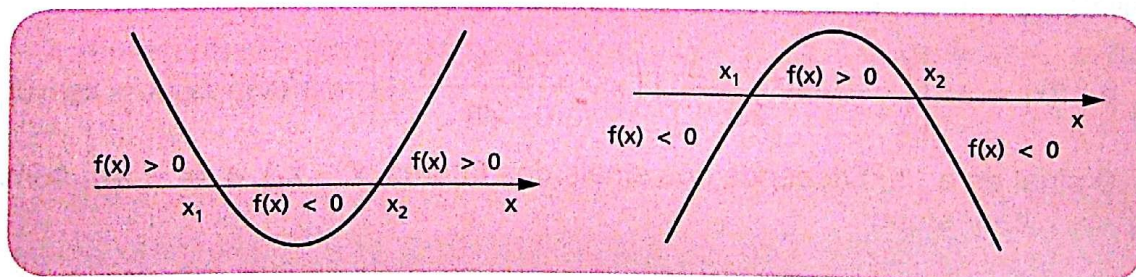
3) se $x > x_2$ — (reta com x_1, x_2, x), temos:

$$x > x_2 > x_1 \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 > 0 \\ \quad e \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \cdot f(x) = \underset{\oplus}{a^2} \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{\oplus} \underbrace{(x - x_2)}_{\oplus} > 0$$

Isso significa que:

1º) O sinal de $f(x)$ é o sinal de a para todo x, tal que $x < x_1$ ou $x > x_2$;

2º) O sinal de $f(x)$ é o sinal de $-a$ para todo x, tal que $x_1 < x < x_2$.

Em resumo:

O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta > 0$, vem confirmar a dedução algébrica.

Exemplos:

1º) $f(x) = x^2 - x - 6$ apresenta $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$; então $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para} \quad x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 3 \\ f(x) = 0 & \text{para} \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3 \\ f(x) < 0 & \text{para} \quad -2 < x < 3 \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ apresenta $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$; logo $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

e, como $a = -2 < 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para} \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para} \quad -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

288. Estude os sinais de cada uma das funções do exercício 281.

289. Quais as condições de *x* para que a expressão $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac > 0$ e $a < 0$, seja estritamente positiva?

290. Qual é a condição necessária e suficiente para que o trinômio do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha sinal constante em $\mathbb{R}$?

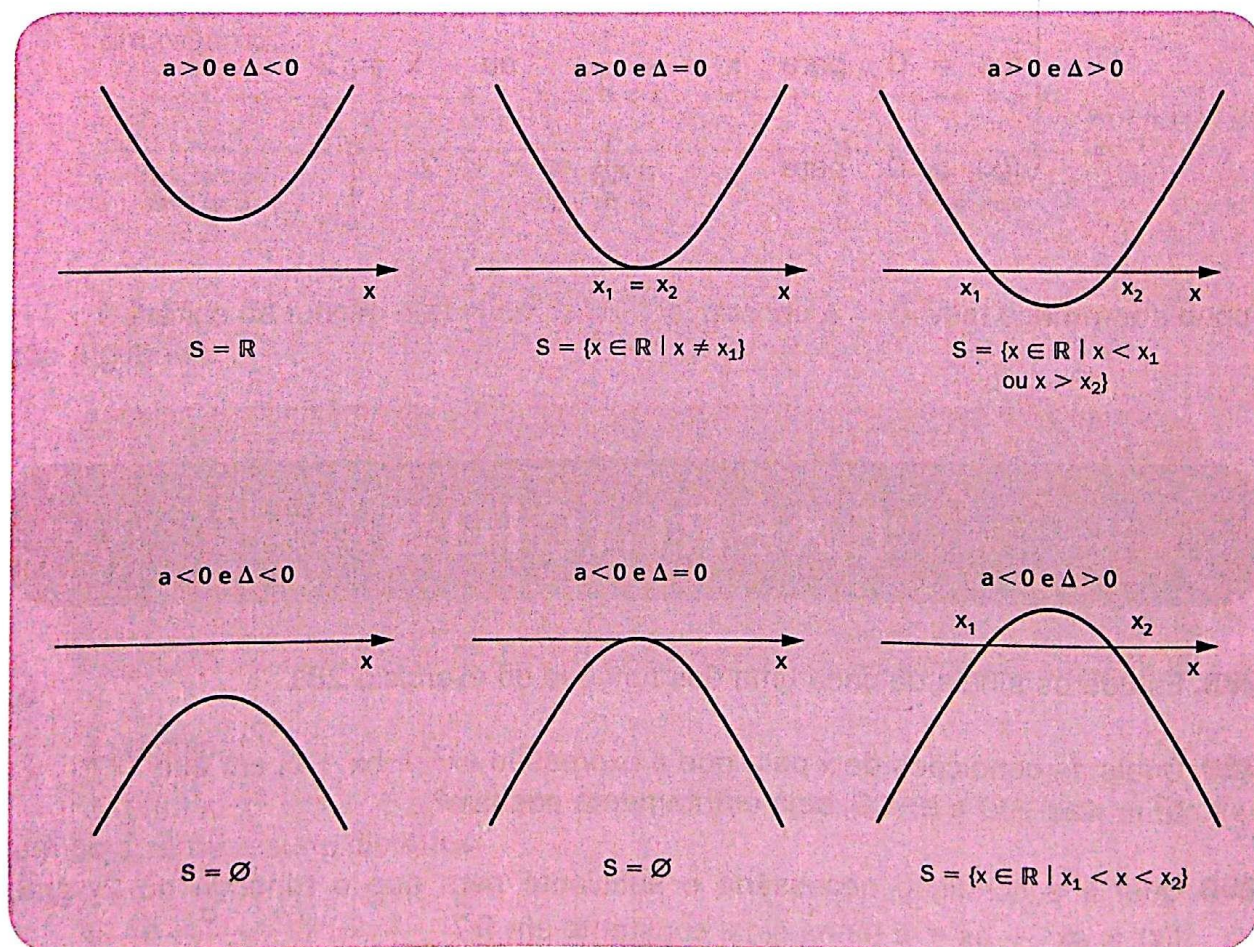
XII. Inequação do 2º grau

122. Se $a \neq 0$, as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ e $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ são denominadas **inequações do 2º grau**.

Resolver, por exemplo, a inequação:

$$ax^2 + bx + c > 0$$

é responder à pergunta: "existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?".

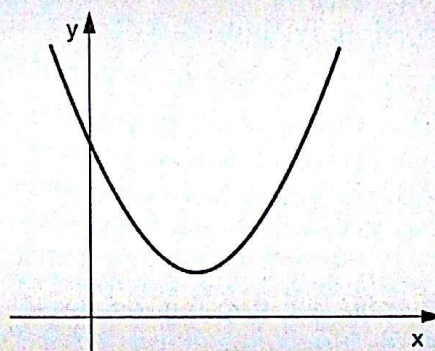
A resposta a essa pergunta se encontra no estudo do sinal de $f(x)$, que pode, inclusive, ser feito através do gráfico da função. Assim, no nosso exemplo, dependendo de a e de Δ, podemos ter uma das seis respostas seguintes:

EXERCÍCIOS

291. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$; então, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como a inequação é $f(x) > 0$, vem:

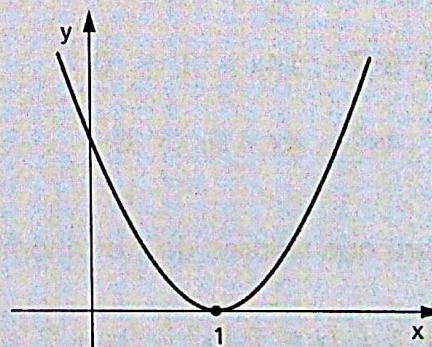
$$S = \mathbb{R}$$

292. Resolva a inequação $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$ e o zero duplo $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$; então:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

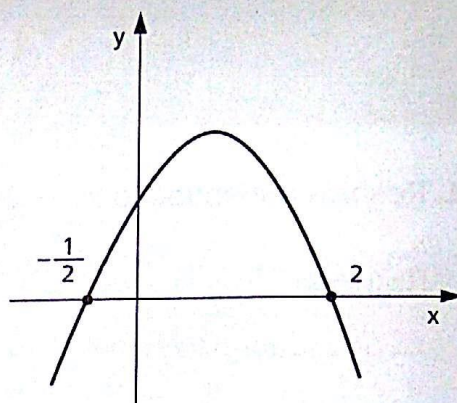
Como a inequação é $f(x) \leqslant 0$, vem:

$$S = \{1\}$$

293. Resolva a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$.

Solução

Considerando $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$, temos $a = -2 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e os zeros $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $x_2 = 2$; então:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ para } x < -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 \text{ para } -\dfrac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) \geqslant 0$, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$$

294. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

b) $-x^2 + x + 6 > 0$

c) $-3x^2 - 8x + 3 \leqslant 0$

d) $-x^2 + \dfrac{3}{2}x + 10 \geqslant 0$

e) $8x^2 - 14x + 3 \leqslant 0$

f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

g) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$

h) $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$

i) $x^2 + 3x + 7 > 0$

j) $-3x^2 + 3x - 3 < 0$

k) $2x^2 - 4x + 5 < 0$

l) $-\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} > 0$

295. Para que valores de x o trinômio $-x^2 + 3x - 4$ é negativo?

296. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, determine $A \cap B$.

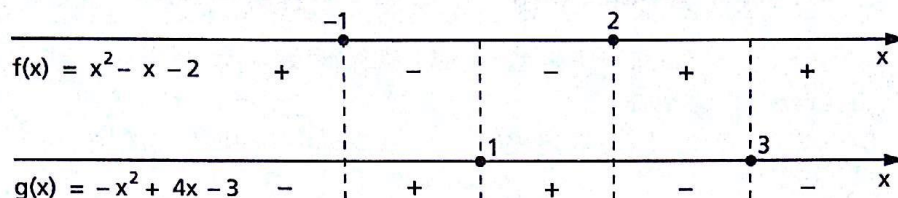
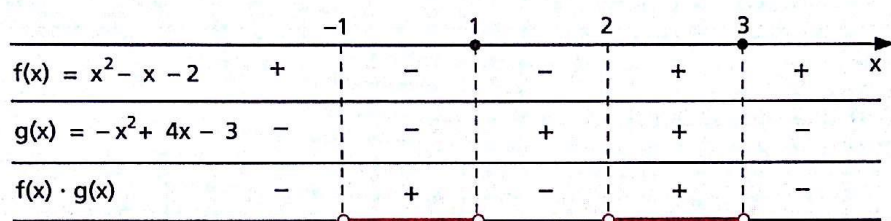
297. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 2x^2 \geqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 \leqslant 0\}$, determine $(A \cup B) \cap C$.

298. Sejam $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $q(x) = x^2 + 5x + 6$. Se a é um número real e $p(a) < 0$, qual é a condição que deve satisfazer $q(a)$?

299. Qual é uma condição suficiente para que a expressão $y = +\sqrt{x^2 - 4}$ represente uma função?

300. Resolva a inequação $(x^2 - x - 2) \cdot (-x^2 + 4x - 3) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais dos fatores, temos:

Fazendo o quadro-produto, vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$$

301. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(1 - 4x^2) \cdot (2x^2 + 3x) > 0$

b) $(2x^2 - 7x + 6) \cdot (2x^2 - 7x + 5) \leqslant 0$

c) $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$

d) $(x^2 + x - 6) \cdot (-x^2 - 2x + 3) \geqslant 0$

e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leqslant 0$

302. É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5) \cdot (x^2 - 2x + 2)$.
Determine:

a) os pontos de interseção do gráfico da função com o eixo das abscissas;

b) o conjunto dos valores de *x* para os quais $y \leqslant 0$.

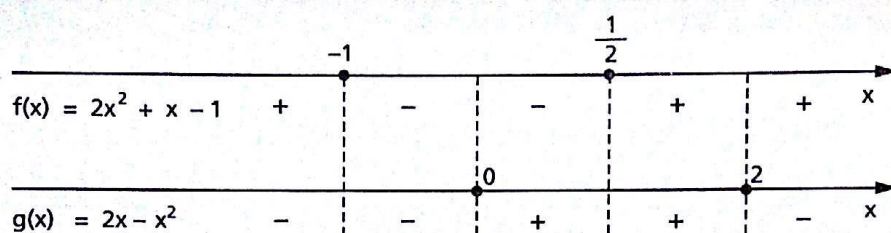
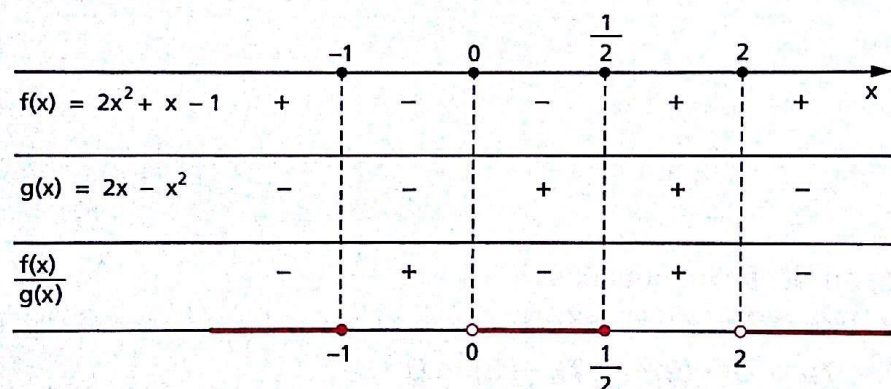
303. Dentre os números inteiros que são soluções da inequação
$(x^2 - 21x + 20) \cdot (3 - x) > 0$, qual é o maior?

304. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a inequação
$(x^2 - 2x + 8) \cdot (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 16) < 0$.

305. Seja A o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $(x^2 - 5x) \cdot (x^2 - 8x + 12) < 0$. Determine A.

306. Resolva a inequação $\dfrac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leqslant 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais do numerador e do denominador, temos:

Fazendo o quadro-quociente, vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$$

307. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\dfrac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\dfrac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} \leqslant 0$

c) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$

d) $\dfrac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

e) $\dfrac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geqslant 1$

f) $\dfrac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} < -2$

g) $\dfrac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geqslant -1$

h) $\dfrac{(x + 1)^3 - 1}{(x - 1)^3 + 1} > 1$

308. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução das inequações:

a) $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x}{x^3-x^2+x-1} \geqslant 0$

c) $\dfrac{x-3}{x-2} \leqslant x-1$

d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$

e) $t + \dfrac{1}{t} \leqslant -2$

f) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1} \geqslant \dfrac{1}{x+1}$

309. Tomando como conjunto universo o conjunto $U = \mathbb{R} - \{1\}$, resolva a inequação $\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{x+2}{1-x}$.

310. Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2$, resolva a inequação:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} \leqslant f(-1)$$

311. Responda:

a) O que se pretende dizer quando se pede para achar o domínio de uma f(x) igualada a uma expressão em *x*?

b) Determine, em $\mathbb{R}$, o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2+1}{x^2-2x-15}}$.

312. Ache o domínio da função $y = \sqrt{\dfrac{-x+5}{x^2+x-6}}$, em $\mathbb{R}$.

313. Determine o conjunto igual a $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}} \geqslant 0\right\}$.

314. Qual é a condição para que $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+2x-8)}{x^2+4x+3}}$, *y* real, seja definida?

315. Resolva as inequações:

a) $4 < x^2 - 12 \leqslant 4x$

b) $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leqslant -5x$

c) $0 \leqslant x^2 - 3x + 2 \leqslant 6$

d) $7x + 1 < x^2 + 3x - 4 \leqslant 2x + 2$

e) $0 < x^2 + x + 1 < 1$

f) $4x^2 - 5x + 4 < 3x^2 - 6x + 6 < x^2 + 3x - 4$

316. Resolva os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 3x - x^2 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + x - 20 \leqslant 0 \\ x^2 - 4x - 21 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + 2x \geqslant 0 \\ -4x^2 + 8x - 3 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x^2 - x + 1 \geqslant 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \leqslant 0 \end{cases}$

317. Considere as desigualdades:

$4y + 3x \leqslant 12, \quad 0 \leqslant x \text{ e } 0 \leqslant y.$

Classifique as proposições abaixo em verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) O conjunto de soluções das desigualdades é limitado no plano (x, y).

b) O valor máximo da variável *x* satisfazendo as desigualdades é 4.

c) O conjunto de soluções das desigualdades não é limitado no plano (x, y).

d) O valor mínimo da variável *y* satisfazendo as desigualdades é 3.

e) O valor máximo da variável *y* satisfazendo as desigualdades é 3.

318. Assinale as proposições verdadeiras (V) e as proposições falsas (F) nos itens abaixo.

O conjunto solução do sistema

$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0\} \cup \{0 < x < 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

319. Resolva a inequação $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0$, em $\mathbb{R}$.

Solução

Fazendo $z = x^2$, temos:

$$z^2 - 5z + 4 \geqslant 0 \Rightarrow z \leqslant 1 \text{ ou } z \geqslant 4$$

mas $z = x^2$; portanto:

$(x^2 \leqslant 1 \text{ ou } x^2 \geqslant 4) \Rightarrow (x^2 - 1 \leqslant 0 \text{ ou } x^2 - 4 \geqslant 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2)$

logo $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

320. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 \leqslant 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 > 0$

c) $x^4 + 8x^2 - 9 < 0$

d) $2x^4 - 3x^2 + 4 < 0$

e) $x^6 - 7x^3 - 8 \geqslant 0$

f) $3x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

321. Determine *m* de modo que a função quadrática

$f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m + 1)$ seja positiva para todo *x* real.

Solução

Devemos ter simultaneamente $\Delta < 0$ e $a > 0$; portanto:

1º) $\Delta = b^2 - 4ac = (2m - 1)^2 - 4 \cdot m \cdot (m + 1) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 -$
$- 4m = -8m + 1 < 0 \Rightarrow m > \dfrac{1}{8}$

2º) $a = m > 0 \Rightarrow m > 0$

Como as condições são simultâneas, concluímos que:

$$(f(x) > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad m > \frac{1}{8}$$

322. Determine *m* para que se tenha para $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

a) $x^2 + (2m - 1)x + (m^2 - 2) > 0$
b) $x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3) \geqslant 0$
c) $x^2 - mx + m > 0$
d) $x^2 + (m + 1)x + m > 0$
e) $-x^2 + (m + 2)x - (m + 3) \geqslant 0$
f) $(m - 1)x^2 + 4(m - 1)x + m > 0$
g) $mx^2 + (m - 2)x + m \leqslant 0$
h) $mx^2 + (m + 3)x + m \geqslant 0$
i) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 1) < 0$
j) $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 > 0$

323. Determine *m* para que se tenha $\dfrac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ para $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Solução

Considerando que $x^2 + x + 1$ é positivo para qualquer *x* real, multiplicamos ambos os membros de $\dfrac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2$ por $(x^2 + x + 1)$, mantendo a desigualdade.

Então:

$$\frac{x^2 + (m + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 2, \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 + (m + 1)x + 1 < 2(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + (m - 1)x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Devemos ter $\Delta < 0$, portanto:

$\Delta = (m - 1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = m^2 - 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$

Resposta: $-1 < m < 3$.

324. Determine *m* para que se tenha para $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1} < 2$

b) $\dfrac{x^2 - mx + 2}{x^2 - x + 2} > m$

c) $\dfrac{x}{x^2 + 4} > \dfrac{x + m}{x^2 + 1}$

d) $-3 < \dfrac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$

325. Qual é o conjunto de valores de *p* para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer *x* pertencente a $\mathbb{R}$?

326. Qual é a condição para que a desigualdade $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 > 0$ seja verificada para todo número real *x*?

327. Se $\dfrac{x - a}{x^2 + 1} < \dfrac{x + a}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, qual é a condição que *a* satisfaz?

328. Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais o domínio da função

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - mx + m}}$ é o conjunto dos reais.

329. Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, em que *x* e *k* são reais, seja definida para qualquer valor de *x*, qual deve ser o valor de *k*?

XIII. Comparação de um número real com as raízes da equação do 2º grau

123. Comparar o número real α às raízes reais $x_1 \leqslant x_2$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ é verificar se:

1º) α está à esquerda de x_1 ($\alpha < x_1 \leqslant x_2$);

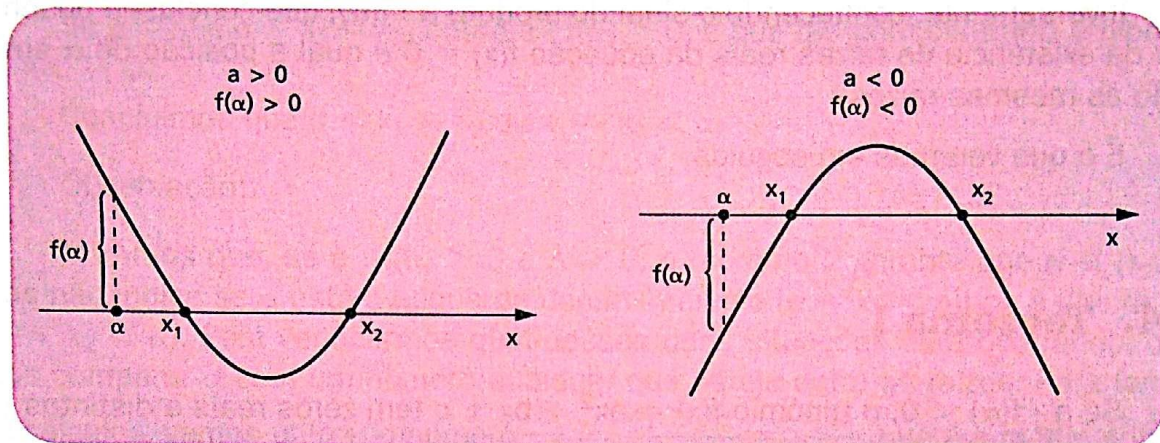
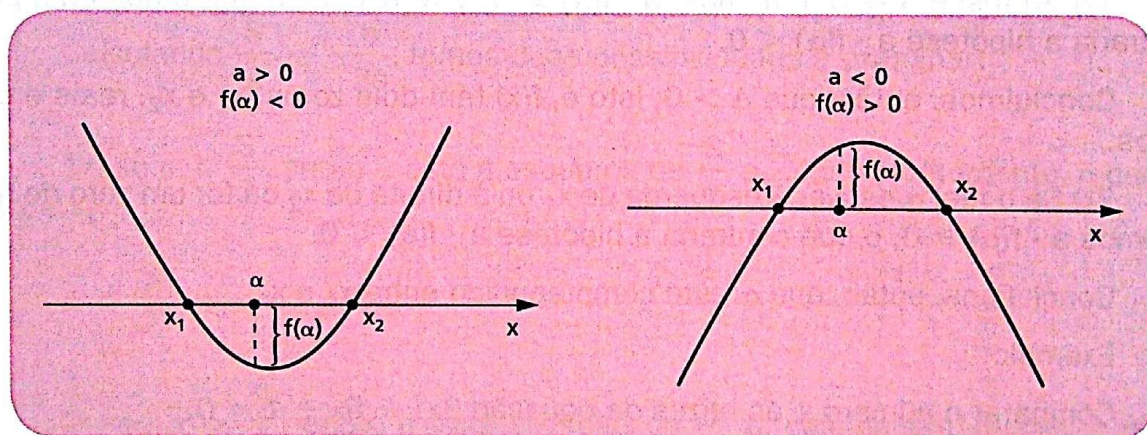
2º) α está entre as raízes ($x_1 < \alpha < x_2$);

3º) α está à direita de x_2 ($x_1 \leqslant x_2 < \alpha$);

4º) α é uma das raízes ($\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$);

sem calcular as raízes.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, cuja regra de sinal já discutimos neste capítulo, temos que:

a) se α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2, o produto $a \cdot f(\alpha)$ é positivo, isto é: *a* (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ têm o mesmo sinal.

b) se α estiver entre as raízes x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$), o produto $a \cdot f(\alpha)$ é negativo, isto é: *a* e $f(\alpha)$ têm sinais opostos.

c) se α é zero de f(x), então $a \cdot f(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$.

Resumo

Conhecendo a posição de α em relação às raízes reais x_1 e x_2 de $f(x) = 0$, temos que:

I) $\alpha < x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$

II) $x_1 < \alpha < x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$

III) $x_1 \leqslant x_2 < \alpha \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$

IV) $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) = 0$

Observemos que nos casos I, III e IV o discriminante é $\Delta \geqslant 0$, enquanto no caso II temos $\Delta > 0$.

Inversamente, conhecendo o sinal do produto $a \cdot f(\alpha)$, que conclusão podemos tirar da existência de raízes reais da equação $f(x) = 0$ e qual a posição de α em relação às mesmas raízes?

É o que veremos em seguida.

124. Teorema 1

Se $a \cdot f(\alpha) < 0$, o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem zeros reais e distintos e α está compreendido entre eles.

Hipótese: $a \cdot f(\alpha) < 0$ Tese: $\Delta > 0$ e $x_1 < \alpha < x_2$

Demonstração:

1º) Se fosse $\Delta \leqslant 0$, teríamos: $a \cdot f(\alpha) \geqslant 0$, $\forall\ \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, o que é absurdo, pois contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluímos, então, que $\Delta > 0$, isto é, $f(x)$ tem dois zeros, x_1 e x_2, reais e distintos.

2º) Se o real α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 ou for um zero de $f(x)$, teremos $a \cdot f(\alpha) \geqslant 0$, o que contraria a hipótese $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Concluímos, então, que α está compreendido entre x_1 e x_2.

Exemplo:

Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Temos $a = 3$, $\alpha = 1$ e $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$; então:

$$a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1) = -3 < 0$$

Conclusão: $\Delta > 0$ e $x_1 < 1 < x_2$.

125. Teorema 2

Se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0$, então α está à esquerda de x_1 ou à direita de x_2.

Hipótese $\begin{cases} a \cdot f(\alpha) > 0 \\ \text{e} \\ \Delta \geqslant 0 \end{cases}$ Tese $\begin{cases} \alpha < x_1 \leqslant x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \end{cases}$

Demonstração:

Se $\Delta > 0$ e $x_1 \leqslant \alpha \leqslant x_2$, então $a \cdot f(\alpha) \leqslant 0$, o que contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Se $\Delta = 0$ e $\alpha = x_1 = x_2$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, o que também contradiz a hipótese $a \cdot f(\alpha) > 0$.

Concluímos que $\alpha < x_1 \leqslant x_2$ ou $x_1 \leqslant x_2 < \alpha$.

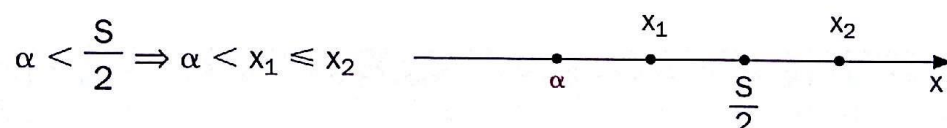
Observação:

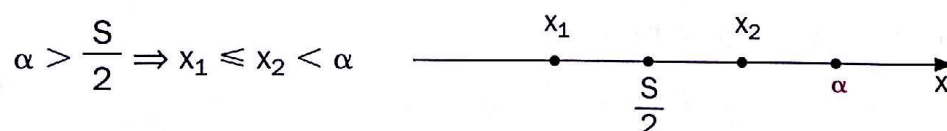
Notemos que, se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0$, o teorema 2 garante que $\alpha \notin [x_1, x_2]$, mas não indica se α está à esquerda desse intervalo ($\alpha < x_1 \leqslant x_2$) ou à direita dele ($x_1 \leqslant x_2 < \alpha$). Para verificarmos qual dessas duas situações está ocorrendo, devemos comparar α com um número qualquer que esteja entre as raízes. Para facilitar os cálculos, vamos utilizar o número $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, que é a média aritmética das raízes x_1 e x_2, pois:

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow x_1 \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2} \leqslant x_2 \Rightarrow x_1 \leqslant \frac{S}{2} \leqslant x_2$$

Calculando $\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a}$, temos duas possibilidades a examinar:

1ª) se $\alpha < \frac{S}{2}$, então α está à esquerda de $\frac{S}{2}$ e, consequentemente, à esquerda de x_1:

$$\alpha < \frac{S}{2} \Rightarrow \alpha < x_1 \leqslant x_2$$

2ª) se $\alpha > \frac{S}{2}$, então α está à direita de $\frac{S}{2}$ e, consequentemente, à direita de x_2:

$$\alpha > \frac{S}{2} \Rightarrow x_1 \leqslant x_2 < \alpha$$

Exemplos:

1º) Comparar o número 1 às raízes da equação $3x^2 + 4x - 3 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 52 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot (3 + 4 - 3) = 12 > 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{3} < 1 = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 < x_2 < 1$$

2º) Comparar o número 0 às raízes da equação $4x^2 - 6x + 1 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 20 > 0 \\ a \cdot f(\alpha) = 4 \cdot f(0) = 4 \cdot 1 = 4 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$$

126. Resumo

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ apresenta zeros reais $x_1 \leqslant x_2$ e α é um número real que vai ser comparado a x_1 e x_2, temos:

a) $a \cdot f(\alpha) < 0 \xRightarrow{\text{T-1}} x_1 < \alpha < x_2$

b) $a \cdot f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha$ é uma das raízes

c) $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha < x_1 \leqslant x_2 \text{ se } \alpha < \dfrac{S}{2} \\ x_1 \leqslant x_2 < \alpha \text{ se } \alpha > \dfrac{S}{2} \end{cases}$

EXERCÍCIOS

330. Determine *m* de modo que o número 1 esteja compreendido entre as raízes da equação: $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$.

Solução

Considerando $f(x) = mx^2 + (m - 1)x - m$.
Para que aconteça $x_1 < 1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes de $mx^2 + (m - 1)x - m = 0$, devemos ter:

$$a \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{a}\underbrace{[m \cdot 1^2 + (m - 1) \cdot 1 - m]}_{f(1)} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot (m - 1) < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$$

Resposta: $0 < m < 1$.

331. Determine *m* de modo que o número α esteja compreendido entre as raízes da equação:

a) $mx^2 + (2m - 3)x + m - 1 = 0$ e $\alpha = 2$

b) $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$ e $\alpha = -1$

c) $mx^2 + (m - 1)x + (m + 2) = 0$ e $\alpha = 0$

d) $(m^2 - 1)x^2 + (m - 3)x + m + 1 = 0$ e $\alpha = 1$

332. Determine os valores de *m* na equação $x^2 + (m - 2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número real 2 esteja compreendido entre as raízes.

333. Determine *m* para que a equação $(m - 2)x^2 - 3mx + (m + 2) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa.

334. Determine o menor valor inteiro de *k* para que a equação $2x^2 + kx + k - 5 = 0$ tenha duas raízes de sinais opostos, sendo a negativa a de maior valor absoluto.

335. Determine *m* de modo que a equação $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

Solução

Considerando $f(x) = mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m$.

Para que aconteça $-1 < x_1 < x_2$, em que x_1 e x_2 são as raízes reais de $mx^2 - (2m + 1)x + 2 + m = 0$, devemos ter:

$$a \cdot f(-1) > 0, \quad \Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > -1$$

Analisando separadamente cada condição:

1ª) $a \cdot f(-1) > 0 \Rightarrow \underbrace{m}_{a} \cdot \underbrace{[m(-1)^2 - (2m + 1) \cdot (-1) + 2 + m]}_{f(-1)} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \cdot (4m + 3) > 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{4} \text{ ou } m > 0$$

2ª) $\Delta \geqslant 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4 \cdot m(2 + m) \geqslant 0 \Rightarrow -4m + 1 \geqslant 0 \Rightarrow m \leqslant \dfrac{1}{4}$

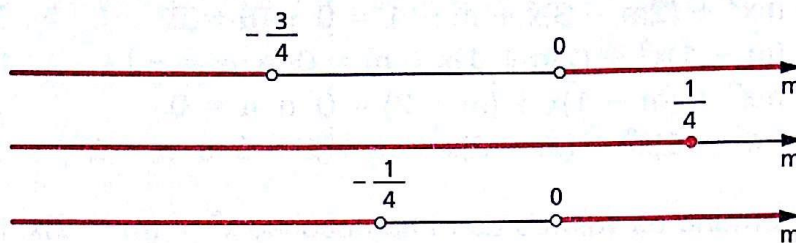
3ª) $\dfrac{S}{2} > -1 \Rightarrow \dfrac{2m + 1}{2m} > -1 \Rightarrow \dfrac{2m + 1}{2m} + 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{4m + 1}{2m} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m < -\frac{1}{4} \text{ ou } m > 0$$

Representando os valores encontrados sobre um eixo.

$(a \cdot f(-1) > 0)$

$(\Delta \geqslant 0)$

$\left(\dfrac{S}{2} > -1\right)$

Como as três condições são simultâneas, fazendo a interseção dos intervalos acima, vamos encontrar:

$$m < -\frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad 0 < m \leqslant \frac{1}{4}, \text{ que é a resposta.}$$

336. Determine *m* de modo que a equação $(m - 3)x^2 + 2(m - 2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.

337. Determine *m* de modo que a equação $(m - 1)x^2 - mx - 2m - 2 = 0$ tenha raízes reais tais que $-1 < x_1 < x_2$.

338. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 2$.

339. Determine *m* para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

340. Determine *m* para que a equação do 2º grau $3x^2 - 2(m + 2)x + m^2 - 6m + 8 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < 1 < x_2 < 4$.

341. Determine *m* para que a equação do 2º grau $(2m + 1)x^2 + 2x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $0 < x_1 < x_2 < 4$.

342. Determine *m* para que a equação do 2º grau $(3m - 2)x^2 + 2mx + 3m = 0$ tenha uma única raiz entre -1 e 0.

343. Determine *m* para que a equação do 2º grau $mx^2 - 2(m - 1)x - m - 1 = 0$ tenha uma única raiz entre -1 e 2.

XIV. Sinais das raízes da equação do 2º grau

127. Estudar os sinais das raízes de uma equação do 2º grau é comparar o número zero às raízes x_1 e x_2 da equação dada.

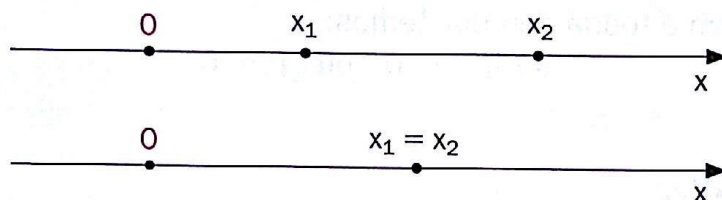
Podem ocorrer três situações:

1ª) as raízes são positivas

Neste caso, temos:

$$0 < x_1 < x_2 \quad \text{ou} \quad 0 < x_1 = x_2$$

0 — x_1 — x_2 — x

0 — $x_1 = x_2$ — x

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} > 0$$

Notemos que, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

a) $a \cdot f(0) = a \cdot c > 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} > 0 \Rightarrow P > 0$

em que $P = \dfrac{c}{a}$ é o produto das raízes da equação do 2º grau.

b) $\dfrac{S}{2} > 0 \Rightarrow S > 0$

em que $S = -\dfrac{b}{a}$ é a soma das raízes da equação do 2º grau.

Assim sendo, uma equação do 2º grau tem raízes positivas somente se:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S > 0$$

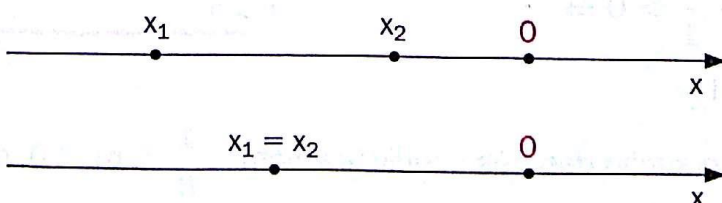
isto é, se as raízes forem reais, com produto positivo e soma positiva.

2ª) as raízes são negativas

Neste caso, temos:

$$x_1 < x_2 < 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = x_2 < 0$$

x_1 — x_2 — 0 — x

$x_1 = x_2$ — 0 — x

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad a \cdot f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{S}{2} < 0$$

Isso também pode ser escrito assim:

$$\Delta \geqslant 0 \quad \text{e} \quad P > 0 \quad \text{e} \quad S < 0$$

3ª) as raízes têm sinais opostos

Neste caso, temos:

$$x_1 < 0 < x_2$$

De acordo com a teoria anterior, temos:

$$a \cdot f(0) < 0 \quad \text{ou} \quad P < 0$$

128. Aplicação

Determinar os valores de *m* na equação do 2º grau:

$$(m - 1)x^2 + (2m + 1)x + m = 0$$

para que as raízes reais sejam distintas e positivas.

Como a equação é do 2º grau, devemos ter, inicialmente,

$$m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$$

e, se as raízes são distintas e positivas ($0 < x_1 < x_2$), então:

$\Delta > 0$ (pelo fato de as raízes serem reais e distintas) e $S > 0$ e $P > 0$ (pelo fato de as raízes serem positivas).

Analisando cada condição:

$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m - 1) \cdot m =$

$= 8m + 1 > 0 \Rightarrow m > -\dfrac{1}{8}$

$S = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(2m + 1)}{m - 1} > 0 \Rightarrow$

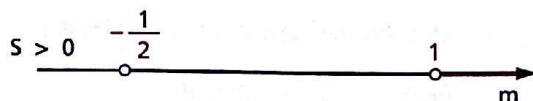
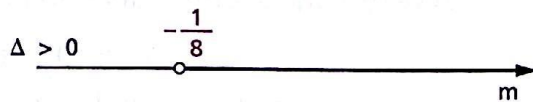
$\Rightarrow -\dfrac{1}{2} < m < 1$

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{m - 1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m < 0$ ou $m > 1$

$\Delta > 0$: $-\frac{1}{8}$ — m

$S > 0$: $-\frac{1}{2}$, 1 — m

$P > 0$: 0, 1 — m

Fazendo a interseção das três condições, vem $-\dfrac{1}{8} < m < 0$, que é a resposta.

EXERCÍCIOS

344. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $(m + 1)x^2 + 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ tenha raízes negativas.

345. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $(m + 1)x^2 + 2x + m - 1 = 0$ tenha raízes positivas.

346. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $(m - 2)x^2 + (3m - 1)x + (m + 1) = 0$ tenha raízes de sinais opostos.

347. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $(m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m = 0$ admita raízes negativas.

348. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $(m^2 - 4)x^2 + mx + m - 3 = 0$ admita raízes de sinais opostos.

349. Determine *m* de modo que a equação do 2º grau $mx^2 - (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ admita raízes positivas.

350. Determine o menor valor inteiro de *k* para que a equação $2x^2 + kx + k - 5 = 0$ tenha duas raízes de sinais opostos, sendo a negativa a de maior valor absoluto.

351. Considere o conjunto $A = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tal que } |y| < 4\}$. Responda:

a) Qual o número de equações do tipo $x^2 + 2mx + n = 0$, com $m \in A$ e $n \in A$?

b) Dentre as equações obtidas no item *a*, quantas têm raízes reais e distintas?

c) Dentre as equações com raízes reais e distintas, quantas têm raízes positivas?

352. A equação $(m^2 + 1)x - 2m + 5 = 0$ admite raiz negativa para qual condição sobre *m*?

353. Sejam *p* e *q* reais; se a equação do segundo grau em *x*:

$$x^2 + p^2x + q^2 + 1 = 0$$

tem duas raízes reais, x_1 e x_2, qual é o sinal dessas raízes?

LEITURA

Dedekind e os números reais

Hygino H. Domingues

A escola pitagórica provou que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Mas nem por isso descobriu os números irracionais. E como os gregos de então, ao contrário de babilônios e egípcios, não eram de se contentar com aproximações, desprovidas de significado teórico, enveredaram pela geometria para superar esse impasse (ver pág. 62). Assim, os gregos do período clássico, ao resolverem a equação $x^2 = 2$, por exemplo, faziam-no geometricamente, fornecendo a raiz positiva como um segmento de reta. E se hoje dizemos "x ao quadrado" para indicar x^2, isso se deve a que os gregos associavam um produto de fatores iguais à figura de um quadrado. Coisa análoga vale para x^3.

Mas a ciência aplicada não pode prescindir da matemática numérica. De modo que já no período alexandrino, quando a matemática grega se abriu para as aplicações, não lhe restou senão imitar a atitude de egípcios e babilônios com relação aos números irracionais — pois ainda demoraria muito até que a natureza destes fosse decifrada.

Assim é que até a primeira metade do século XIX o conceito de número irracional não havia ainda sido elucidado e o conjunto dos números reais carecia de fundamentação lógica. A substituição da intuição geométrica pelos números, como base da análise matemática, foi a grande motivação, no século XIX, para as tentativas de pôr em pratos limpos a questão dos números reais. E entre os matemáticos com papel decisivo nessa empreitada figura Richard Dedekind (1831-1916).

MONDADORI/UIG/GRUPO KEYSTONE

Richard Dedekind (1831-1916).

Dedekind nasceu na Alemanha, em Brunswick, também cidade natal de Gauss. Mas, ao contrário deste, seu extraordinário gênio matemático não aflorou precocemente. Na Universidade de Göttingen, em que

ingressou aos 19 anos de idade, Dedekind iria ter a oportunidade de ser aluno de seu conterrâneo. E o mesmo Gauss, em 1852, teve ocasião de dar parecer favorável à tese de doutoramento de Dedekind.

Depois de trabalhar quatro anos em Göttingen como instrutor e seis anos como professor na Escola Politécnica de Zurique, Dedekind foi contratado pela Escola Técnica Superior de sua cidade natal, onde permaneceu até a morte.

São inúmeras as contribuições de Dedekind à Matemática. Mas seu nome provavelmente é mais lembrado por dois importantes conceitos: o de **ideal**, um dos mais fecundos hoje em dia em todos os campos da Matemática; e o de **corte**, através do qual caracterizou, num livro de 1872, os números reais.

Como professor de cálculo, já a partir de 1858, sentiu mais diretamente a falta de um embasamento teórico para o sistema dos números reais. Exemplificava dizendo não haver uma demonstração sequer para coisas corriqueiras como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. E a questão central era como esclarecer a ideia de **continuidade**.

Depois de meditar muito, mas sem buscar inspiração em Eudóxio, Dedekind abraçou a ideia de que se poderia chegar ao conceito de continuidade através de convenientes partições em $\mathbb{Q}$. E definiu um corte em $\mathbb{Q}$ como uma partição deste conjunto num par (A, B) de subconjuntos não vazios tais que todo elemento do primeiro é menor que todo elemento do segundo. Por exemplo, para cada $a \in \mathbb{Q}$ está associado o **corte racional** (A, B) definido por *a*, em que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant a\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\}$. Mas não vale a recíproca: há cortes não racionais.

Dedekind mostrou como operar com esses cortes e como compará-los. Desse modo cada corte passa a representar formalmente um número real e o conjunto desses cortes pode ser visto como o conjunto dos números reais. Por exemplo, o corte (A, B) do exemplo representa o número racional *a*; os cortes não racionais são os números irracionais da teoria de Dedekind.

Os mais de 2000 anos decorridos desde o início até o fim desta história dão bem uma ideia da magnitude do passo dado por Dedekind.

CAPÍTULO VIII

Função modular

I. Função definida por várias sentenças abertas

Uma função *f* pode ser definida por várias sentenças abertas, cada uma das quais está ligada a um domínio D_i contido no domínio da *f*.

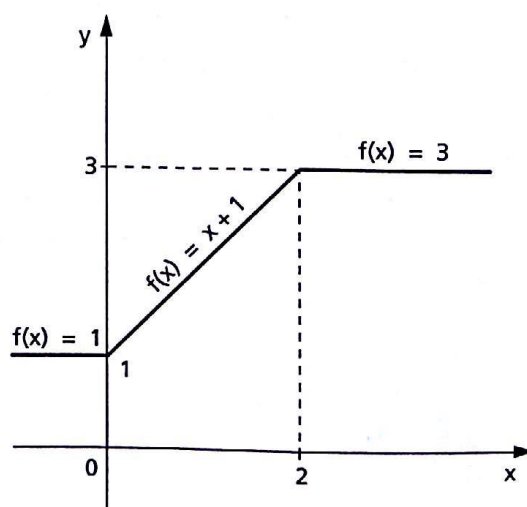
129. Exemplos preliminares

1º) Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

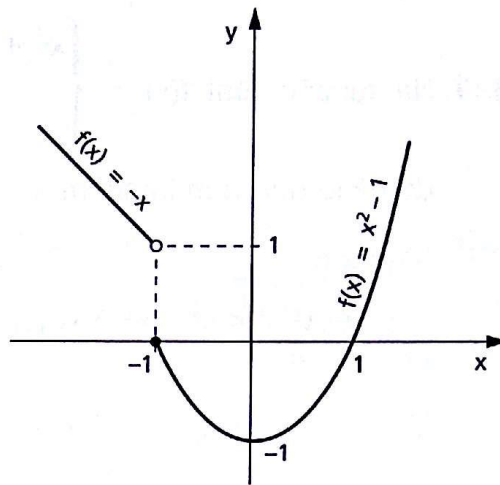
$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ para } x < 0 \\ f(x) = x + 1 \text{ para } 0 \leqslant x < 2 \\ f(x) = 3 \text{ para } x \geqslant 2 \end{cases}$$

que também pode ser indicada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

O seu gráfico está representado ao lado.

2º) Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$f(x) = -x$ para $x < -1$
$f(x) = x^2 - 1$ para $x \geqslant -1$
que também pode ser indicada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geqslant -1 \end{cases}$$

O seu gráfico está representado ao lado.

EXERCÍCIOS

354. Construa o gráfico das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2 + x & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leqslant -2 \\ x & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geqslant 1 \\ x - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \geqslant 0 \\ 1 - x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x > -2 \\ 1 & \text{se } x \leqslant -2 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 4x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x^2 + 4x + 3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

355. Esboce o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x \geqslant 2 \\ x^2 - 1 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ |x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

356. Construa o gráfico da função real dada por:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

357. Na função real $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{se } x > -2 \\ -\dfrac{x}{2} + 1 & \text{se } x \leqslant -2 \end{cases}$, determine os valores do domínio que têm imagem 4.

Solução

Para determinarmos o valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4$, resolvemos as equações

$$x^2 + x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{(não convém)} \\ x = 2 \end{cases}$$

e

$$-\frac{x}{2} + 1 = 4 \Rightarrow x = -6$$

logo, os valores do domínio que têm imagem 4 são $x = 2$ ou $x = -6$.

358. Na função real $f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, determine os valores do domínio que têm imagem 7.

359. Considere a função $y = f(x)$ definida por:

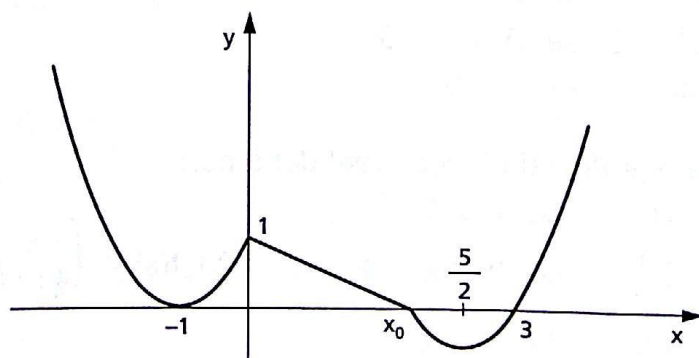
$$\begin{cases} y = 4x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ y = -x^2 + 6x & \text{se } 2 < x \leqslant 6 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 6$.

b) Para que valores de *x* temos $f(x) = 5$?

360. Considerando a função real definida pela sentença

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{se } x \leqslant 0 \\ mx + n & \text{se } 0 < x < x_0 \\ x^2 + b_1x + c_1 & \text{se } x \geqslant x_0 \end{cases}$$

cujo gráfico é:

pode-se afirmar:

a) A equação $f(x) = \frac{3}{2}$ tem 4 soluções.

b) $f(-2) = 1$.

c) Se $0 < x < 1$, então $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$.

d) Se $x \geqslant 1$, então $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

e) O conjunto imagem da função é o intervalo $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

II. Módulo

130. Definição

Sendo $x \in \mathbb{R}$, define-se **módulo** ou **valor absoluto** de x, que se indica por $|x|$, por meio da relação:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geqslant 0 \\ \text{ou} & \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que:

1º) o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;

2º) o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número.

Assim, por exemplo, temos:

$$|+2| = +2,\ |-7| = +7,\ |0| = 0,\ \left|-\frac{3}{5}\right| = +\frac{3}{5},\ |-\sqrt{2}| = +\sqrt{2},\ |+\sqrt{3}| = +\sqrt{3}$$

131. Propriedades

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

1ª) $|x| \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2ª) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3ª) $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

4ª) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

5ª) $x \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

6ª) $|x + y| \leqslant |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

7ª) $|x - y| \geqslant |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

8ª) $|x| \leqslant a$ e $a > 0 \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

9ª) $|x| \geqslant a$ e $a > 0 \Leftrightarrow x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$

Demonstrações:

1ª) Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x \geqslant 0$.
Se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$.

2ª) Se $x = 0$, então $|x| = x = 0$.
Se $|x| = 0$, então $x = 0$, pois, caso $x \neq 0$, resultaria $|x| > 0$.

3ª) Se $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, então $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y \geqslant 0$.
Se $x < 0$ e $y < 0$, então $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = xy = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y > 0$.
Se $x \geqslant 0$ e $y < 0$, então $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y = |x \cdot y|$, pois $x \cdot y \leqslant 0$.
Se $x < 0$ e $y \geqslant 0$, analogamente.

4ª) Se $x \geqslant 0$, então $x = |x|$ e daí $x^2 = |x|^2$.
Se $x < 0$, então $-x = |x|$ e daí $(-x)(-x) = |x| \cdot |x|$, isto é, $x^2 = |x|^2$.

5ª) Se $x \geqslant 0$, então $x = |x|$ e, se $x < 0$, então $x < 0 < |x|$; portanto, $x \leqslant |x|$ para todo *x* real.

6ª) $|x + y|^2 \underset{(IV)}{=} (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \underset{(V)}{\leqslant} |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| =$
$= (|x| + |y|)^2$ e daí $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

7ª) $|x - y|^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant x^2 + y^2 - 2 \cdot |x| \cdot |y| =$
$= |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| = (|x| - |y|)^2$ e daí $|x - y| \geqslant |x| - |y|$.

8ª) $|x| \leqslant a \overset{a > 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

9ª) $|x| \geqslant a \overset{a > 0}{\Leftrightarrow} x^2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$.

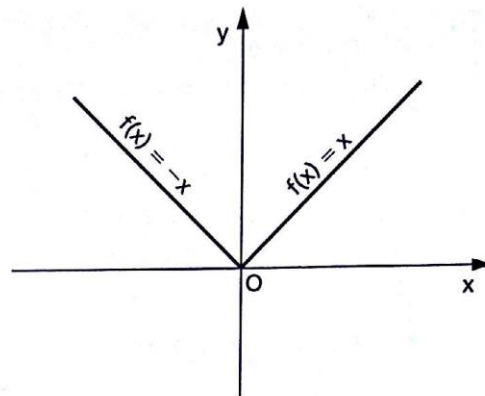
III. Função modular

132. Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função módulo** ou **modular** quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $|x| \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = |x|$$

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser definida também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de origem 0, que são as bissetrizes do 1º e 2º quadrantes.

A imagem desta função é $Im = \mathbb{R}_+$, isto é, a função modular somente assume valores reais não negativos.

EXERCÍCIOS

361. Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = |3x|$

362. Construa o gráfico da função real definida por $f(x) = |x + 1|$.

Solução

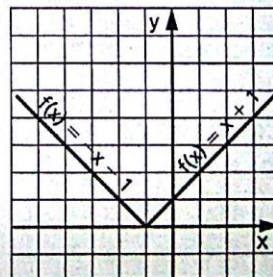
Podemos construir o gráfico de $f(x) = |x + 1|$ por dois processos:

1º) processo:

Notemos que $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \geqslant -1 \\ -x - 1 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$

Então a função pode ser definida como uma função a duas sentenças, ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \geqslant -1 \\ -x - 1 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

cujo gráfico está representado ao lado.

2º) processo:
Para construirmos o gráfico de

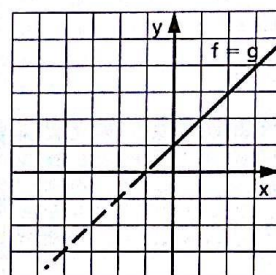
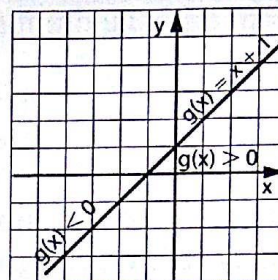
$$f(x) = |x + 1|,$$

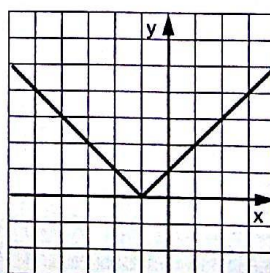
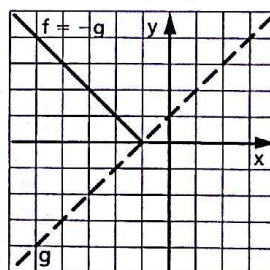
fazemos inicialmente o gráfico da função $g(x) = x + 1$, que está representado ao lado.

Para obtermos o gráfico de

$$f(x) = |g(x)| = |x + 1|$$

fazemos em duas etapas:

Primeira etapa:
Se $g(x) \geqslant 0$, vamos ter $f(x) = |g(x)| = g(x)$, isto é, o gráfico da função *f* coincidirá com o gráfico da função *g*.

Segunda etapa:
Se $g(x) < 0$, vamos ter
$f(x) = |g(x)| = -g(x)$, isto é, o gráfico da função *f* será simétrico do gráfico da função *g*, relativamente ao eixo das abscissas.

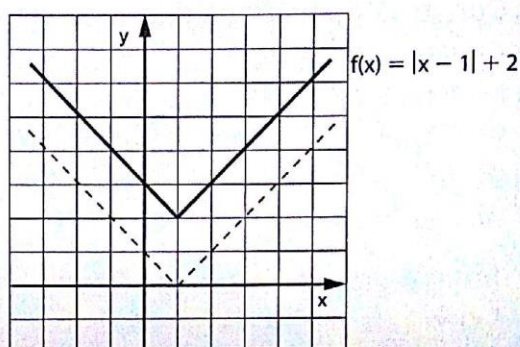
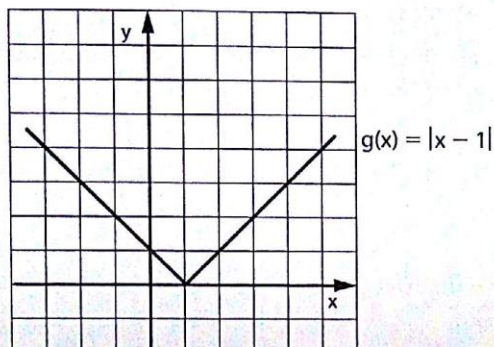
Construindo os gráficos obtidos, nas duas etapas, no mesmo plano cartesiano temos o gráfico da função $f(x) = |x + 1|$.

363. Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x - 1|$
b) $f(x) = |2x - 1|$
c) $f(x) = |2x + 3|$
d) $f(x) = |2 - 3x|$
e) $f(x) = |x^2 + 4x|$
f) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
g) $f(x) = |4 - x^2|$

364. Construa o gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x - 1| + 2$.

Solução

Construímos inicialmente o gráfico da função $g(x) = |x - 1|$.

Para obtermos o gráfico de $f(x) = g(x) + 2$, deslocamos cada ponto do gráfico da função g duas unidades "para cima".

365. Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x| - 3$

b) $f(x) = |2x - 1| - 2$

c) $f(x) = |3x - 4| + 1$

d) $f(x) = |x^2 - 1| - 2$

e) $f(x) = |x^2 - 4| + 3$

f) $f(x) = |x^2 + 4x + 3| - 1$

366. Construa o gráfico da função real:

a) $y = |x| - 1$

b) $y = -|x - a| + a$

367. Construa o gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ $f(x) = |x + 2| + x - 1$.

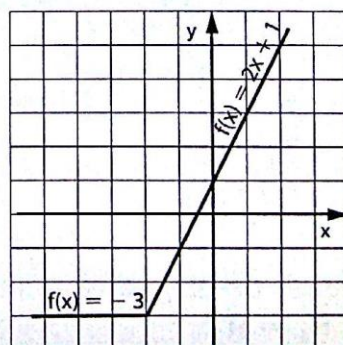
Solução

Notemos que

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Devemos, então, considerar dois casos:

1º) quando $x \geqslant -2$, temos:
$f(x) = |x + 2| + x - 1 =$
$= x + 2 + x - 1 = 2x + 1$

2º) quando $x < -2$, temos:
$f(x) = |x + 2| + x - 1 =$
$= -x - 2 + x - 1 = -3$

Anotando a função f como uma função definida a duas sentenças, vem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -2 \\ -3 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

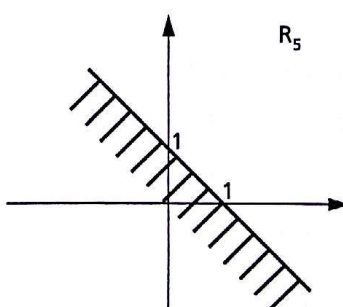
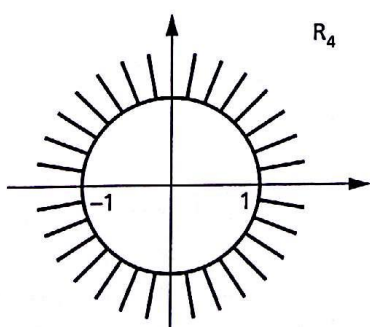
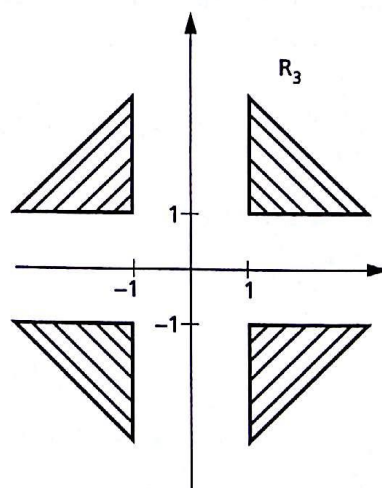
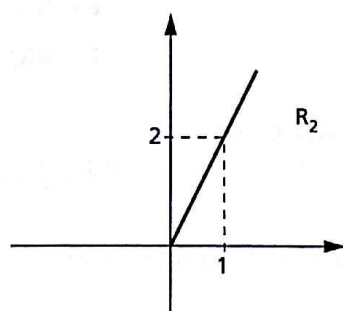
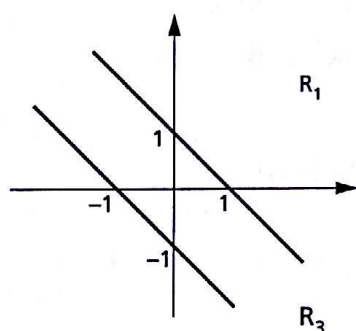
cujo gráfico está na página anterior.

368. Construa os gráficos das funções reais abaixo.

a) $f(x) = |x| + x$
b) $f(x) = |x| - x$
c) $f(x) = |x - 3| + x + 2$
d) $f(x) = |x + 1| - x + 3$
e) $f(x) = |2x - 1| + x - 2$
f) $f(x) = |3x + 2| - 2x + 3$
g) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$
h) $f(x) = |x^2 - 2|x| - 3|$
i) $f(x) = |x^2 - 2x| + x + 2$

369. Trace o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x^2 - 1) + |x^2 - 1| + 1$.

370. Determine o conjunto imagem da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2|x - 3| + x - 1$.

371. Os diagramas cartesianos abaixo representam relações em $\mathbb{R}$.

Analise os diagramas e indique as afirmativas verdadeiras.

a) $R_1 = R_1^{-1}$
b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = |x| + x\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| > 1 \text{ e } |y| \geq 1\}$
d) $D(R_4) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
e) $I(R_5) =]-\infty, 1]$

372. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definida em $\mathbb{R}^*$.

373. Construa o gráfico da função $f(x) = \frac{|x - 1|}{1 - x}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

374. Construa o gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = |2x + 1| + |x - 1|.$$

Solução

Notemos que $|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geqslant -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

e $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Devemos, então, considerar três casos:

1º) quando $x < -\frac{1}{2}$, temos:

$f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = -2x - 1 - x + 1 = -3x$

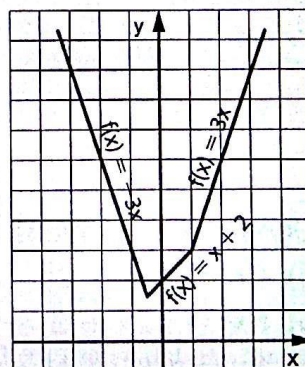
2º) quando $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, temos:

$f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = 2x + 1 - x + 1 = x + 2$

3º) quando $x \geqslant 1$, temos: $f(x) = |2x + 1| + |x - 1| = 2x + 1 + x - 1 = 3x$.

Anotando a função *f* como uma função definida a várias sentenças, vem:

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{se } x < -\frac{1}{2} \\ x + 2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leqslant x < 1 \\ 3x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

cujo gráfico está ao lado.

375. Construa o gráfico da função real definida por:

a) $f(x) = |x - 1| - |x|$

b) $y = -x \cdot |x|$

376. Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$

b) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$

c) $f(x) = |2x - 2| + |x + 3|$

d) $f(x) = |3x + 3| - |2x - 3|$

e) $f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$

f) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 2x| - |x^2 - 4|}{2}$

377. Construa o gráfico da função definida em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = ||2x - 2| - 4|$$

Solução

Construímos inicialmente o gráfico de $g(x) = |2x - 2| - 4$.

Analisemos as duas possibilidades:

1ª) Se $g(x) \geqslant 0$, temos:

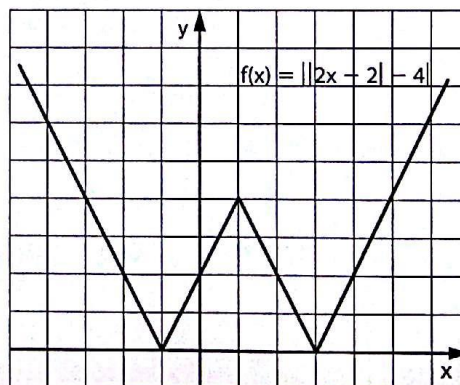
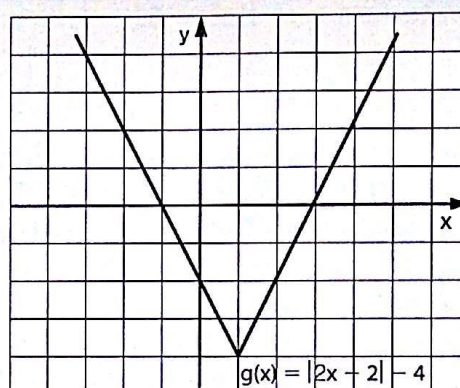
$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

isto é, o gráfico da função f coincide com o gráfico da função g.

2ª) Se $g(x) < 0$, temos:

$$f(x) = |g(x)| = -g(x)$$

isto é, o gráfico da função f é o oposto do gráfico da função g.

Considerando as duas possibilidades e representando num mesmo plano cartesiano, temos:

378. Construa os gráficos das funções reais:

a) $f(x) = ||x| - 2|$

b) $f(x) = ||2x + 3| - 2|$

c) $f(x) = ||x^2 - 1| - 3|$

d) $f(x) = ||x - 1| + x - 3|$

e) $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$

f) $f(x) = ||x + 2| - |x - 2||$

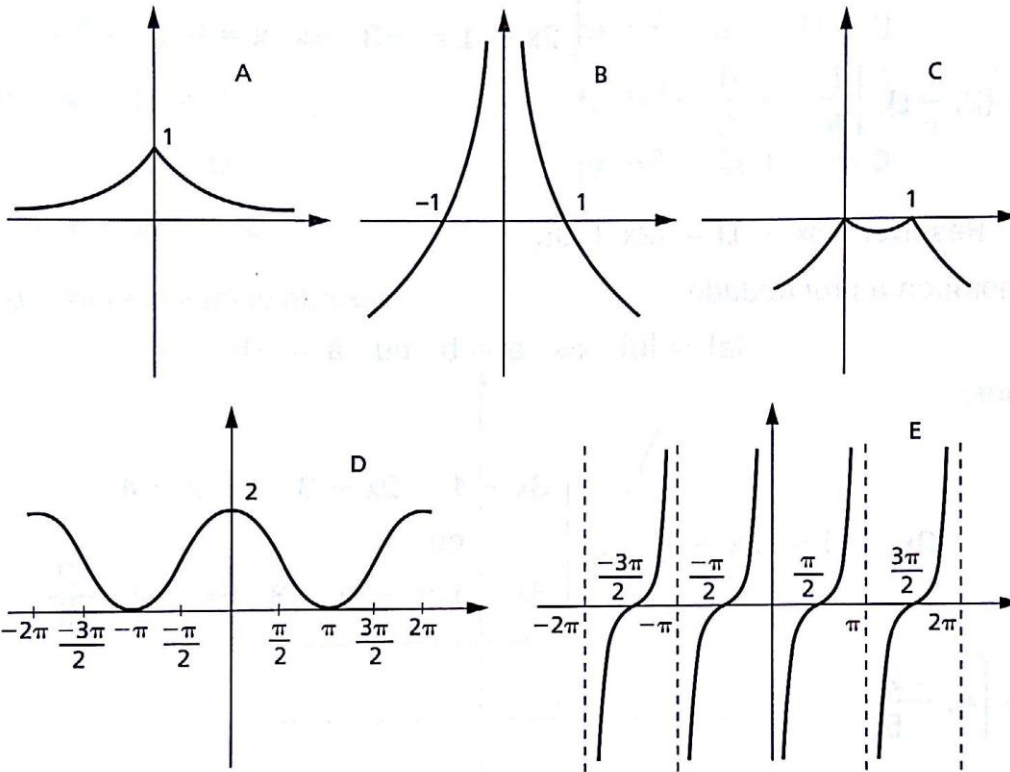
g) $f(x) = ||x - 3| - |2x + 1||$

379. Construa o gráfico da função real definida por:

a) $f(x) = |x^2 - 5|x| + 6|$

b) $y = 2x + |x - 2|x||$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

380. Considerando os gráficos abaixo, indique as afirmativas verdadeiras.

a) A representa a função $f(x) = \dfrac{1}{2^{|x|}}$.

b) B representa a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$.

c) C representa a função $f(x) = -|x^2 - x|$.

d) D representa a função $f(x) = 1 + \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

e) E representa a função $f(x) = \text{cotg } x$.

IV. Equações modulares

133. Lembremos a propriedade do módulo dos números reais, para $k > 0$:

$$|x| = k \Leftrightarrow x = k \quad \text{ou} \quad x = -k$$

e, utilizando essa propriedade, vamos resolver algumas equações modulares.

1º) Resolver $|2x - 1| = 3$.

Então:

$$|2x - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$S = \{2, -1\}$

2º) Resolver $|3x - 1| = |2x + 3|$.

Lembrando a propriedade

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

temos:

$$|3x - 1| = |2x + 3| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2x + 3 \Rightarrow x = 4 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -2x - 3 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$S = \left\{4, -\dfrac{2}{5}\right\}$

3º) Resolver $|x + 1| = 3x + 2$.

Devemos ter inicialmente:

$$3x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{2}{3}$$

para que seja possível a igualdade.

Supondo $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$, temos:

$$|x + 1| = 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3x + 2 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x + 1 = -3x - 2 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{4} \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

EXERCÍCIOS

381. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $|x + 2| = 3$

b) $|3x - 1| = 2$

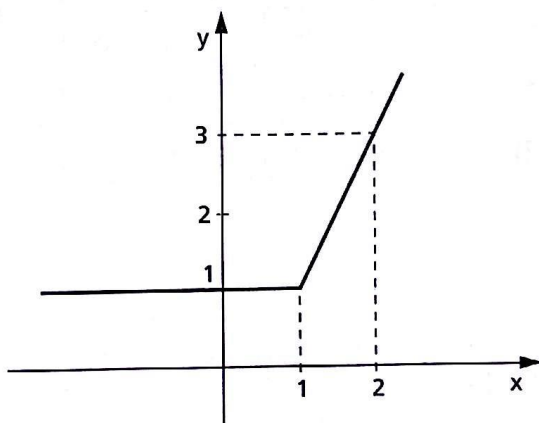
c) $|4x - 5| = 0$

d) $|2x - 3| = -1$

e) $|x^2 - 3x - 1| = 3$

f) $\left|x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}\right| = \frac{5}{4}$

g) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

382. Considere o gráfico abaixo:

a) Mostre que esse gráfico representa a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + |x - 1|$.

b) Dada a função constante $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = k$, para que valores de *k* a equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução?

383. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $|3x + 2| = |x - 1|$

b) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$

c) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

d) $|x^2 + 2x - 2| = |x^2 - x - 1|$

384. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $|x - 2| = 2x + 1$

b) $|3x + 2| = 2x - 3$

c) $|2x - 5| = x - 1$

d) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

e) $|3x - 2| = 3x - 2$

f) $|4 - 3x| = 3x - 4$

385. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$.

Sugestão: Faça $|x| = y$.

386. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|2x - 3| + |x + 2| = 4$.

Solução

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{se } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{se } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

	$x < -2$	$-2 \leq x < \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
$\|2x - 3\|$	$-2x + 3$	$-2x + 3$	$2x - 3$
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\|2x - 3\| + \|x + 2\|$	$-3x + 1$	$-x + 5$	$3x - 1$

Temos, então:

$$|2x - 3| + |x + 2| = \begin{cases} -3x + 1 & \text{se } x < -2 \\ -x + 5 & \text{se } -2 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ 3x - 1 & \text{se } x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Resolvendo cada parte, vem:

$-3x + 1 = 4 \Rightarrow x = -1$ (Não serve, porque x deve ser menor que -2.)

$-x + 5 = 4 \Rightarrow x = 1$

$3x - 1 = 4 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

Resposta: $S = \left\{1, \dfrac{5}{3}\right\}$

387. Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, das equações:

a) $|x + 1| - |x| = 2x + 1$

b) $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

V. Inequações modulares

134. Lembrando as propriedades de módulo dos números reais, para $k > 0$:

1ª) $|x| < k \iff -k < x < k$

2ª) $|x| > k \iff x < -k$ ou $x > k$

e, utilizando essas propriedades, podemos resolver algumas inequações modulares.

1º) Resolver em $\mathbb{R}$: $|2x + 1| < 3$.
Então:

$$|2x + 1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x + 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 1$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$.

2º) Resolver em $\mathbb{R}$: $|4x - 3| > 5$.
Então:

$$|4x - 3| > 5 \Rightarrow (4x - 3 < -5 \text{ ou } 4x - 3 > 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right)$$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$.

EXERCÍCIOS

388. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações abaixo.

a) $|3x - 2| < 4$
b) $|2x - 3| \leqslant 1$
c) $|4 - 3x| \leqslant 5$
d) $|3x + 4| \leqslant 0$
e) $|2x + 4| < -3$
f) $|2x - 1| > 3$
g) $|5x + 4| \geqslant 4$
h) $|2 - 3x| \geqslant 1$
i) $|3x - 5| > 0$
j) $|4x - 7| \geqslant -1$
k) $1 < |x - 1| \leqslant 3$

389. Resolva as inequações seguintes, em $\mathbb{R}$.

a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$
b) $|x^2 - x - 4| > 2$
c) $|x^2 - 5x| \geqslant 6$
d) $|x^2 - 3x - 4| \leqslant 6$
e) $\dfrac{2x - 3}{|3x - 1|} > 2$
f) $\dfrac{x + 1}{|2x - 1|} \leqslant 2$
g) $||x| - 2| > 1$
h) $||2x + 1| - 3| \geqslant 2$
i) $||2x - 1| - 4| \leqslant 3$

390. Seja a inequação $\left|2 - \frac{1}{x}\right| \leqslant 5$. Quantas de suas soluções são números inteiros positivos e menores que 30?

391. Julgue os itens abaixo.

a) A equação $|2x - 1| = 3$ possui duas raízes reais.

b) Os valores reais de x para os quais $(3x - 2) \cdot (1 - x) \cdot (1 + x^2) \geqslant 0$ são $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

c) Os valores reais de x tais que $\frac{x + 2}{3} - \frac{x - 1}{2} \geqslant x$ são $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$.

d) Não existe número real x que satisfaça a inequação $|\cos x| \geqslant 1$.

e) O polinômio $5x^6 - 6x^5 + x$ é divisível por $(x - 1)^2$.

392. Qual é o comprimento do intervalo que representa a interseção dos conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$?

393. Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $1 < |x - 3| < 4$.

394. Para que valores de x, reais, a função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é menor do que 1?

395. Se $|x^2 - 4| < N$ para todo x real, tal que $|x - 2| < 1$, qual é o menor valor possível para N?

396. Julgue os itens abaixo.

a) As inequações $(x - 5)^2 \cdot (x + 10) < 0$ e $x^2 \cdot (x + 10) < 0$ têm o mesmo conjunto solução.

b) $|x| - |y| \leqslant |x - y|, \forall\, x, y$ números reais.

c) Se $f(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$, $z \neq \pm 1$, então

$$\frac{f(z) - f(-z)}{1 + f(z) \cdot f(-z)} = \frac{4z}{1 - z^2}.$$

d) O domínio máximo de definição da função

$f(x) = (|5 - 2x| - 7)^{\frac{1}{2}}$ é $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

e) A função $f(x) = \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{(x - 2)^2}$ está definida para todo número real $x \neq 2$.

f) A imagem da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$ é somente o zero.

397. Quais os números inteiros que satisfazem a sentença $3 \leqslant |2x - 3| < 6$?

398. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x - 7 + |x + 1| \geq 0$.

Solução

Notando que $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

devemos, então, considerar dois casos:

1º) Se $x \geq -1$, temos:

$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2x - 7 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

A solução S_1 é:

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

2º) Se $x < -1$, temos:

$2x - 7 + |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2x - 7 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 8$

A solução S_2 é:

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = \varnothing$

A solução da inequação proposta é

$$S = S_1 \cup S_2$$

e portanto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

399. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $|x + 1| - 3x + 7 \leq 0$

b) $|2x + 1| + 4 - 3x > 0$

c) $|3x - 2| + 2x - 3 \leq 0$

d) $|x + 1| - x + 2 \geq 0$

e) $|3x - 4| + 2x + 1 < 0$

f) $|x^2 - 4x| - 3x + 6 \leq 0$

g) $|x^2 - 6x + 5| + 1 < x$

400. Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

401. Indique as afirmativas verdadeiras.

a) $\forall\, x \in [-1, 0]$, $|x| = -x$.

b) O complementar do conjunto solução da inequação $|x - 1| \geq 2$ é o intervalo $]-1, 3[$.

c) A equação $|x - 1| = 2x$ tem duas soluções.

d) Todas as raízes da equação $2^{|x^2 - 3|} = 8$ são números irracionais.

e) O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4) < 2$ está contido no conjunto $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

402. Qual é o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, de $|x - 3| < x + 3$?

403. Resolva a inequação $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Notando que:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{se } x < 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

construímos a tabela:

x	0	3	
$\lvert 2x - 6\rvert =$	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x - 6$
$\lvert x\rvert =$	$-x$	x	x
$\lvert 2x - 6\rvert - \lvert x\rvert =$	$-x + 6$	$-3x + 6$	$x - 6$

Temos:

$$|2x - 6| - |x| = \begin{cases} x - 6 & \text{se } x \geq 3 \\ -3x + 6 & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ -x + 6 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Devemos considerar três casos:

1º) Se $x \geq 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$x - 6 \leq 4 - x \Rightarrow 2x \leq 10 \Rightarrow x \leq 5$$

A solução S_1 é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

2º) Se $0 \leq x < 3$, a inequação proposta é equivalente a:

$$-3x + 6 \leq 4 - x \Rightarrow -2x \leq -2 \Rightarrow x \geq 1$$

A solução S_2 é:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$$

3º) Se $x < 0$, a inequação proposta é equivalente a:

$-x + 6 \leq 4 - x \Rightarrow 6 \leq 4$, que é absurdo. Logo a solução S_3 é:

$$S_3 = \varnothing$$

A solução da inequação $|2x - 6| - |x| \leq 4 - x$ é:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\} \cup \varnothing$

e portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

404. Resolva as seguintes inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $|x + 2| - |x - 3| > x$

b) $|3x + 2| - |2x - 1| > x + 1$

c) $|x - 2| - |x + 4| \leqslant 1 - x$

d) $|x + 2| + |2x - 3| < 10$

e) $|x + 2| + |2x - 2| > x + 8$

f) $3\{|x + 1| - |x - 1|\} \leqslant 2x^2 - 4x$

g) $|x - 2| - |x + 3| > x^2 - 4x + 3$

405. Resolva a desigualdade $|x - 2| + |x - 4| \geqslant 6$.

406. Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da desigualdade $|x + 1| - |x| \leqslant x + 2$?

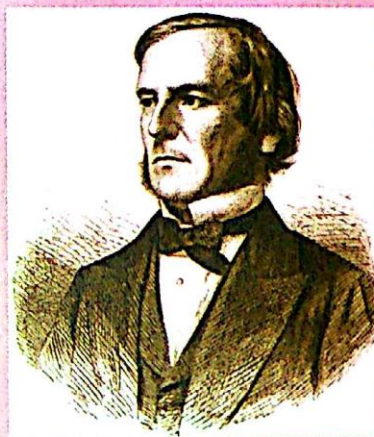
LEITURA

Boole e a álgebra do pensamento

Hygino H. Domingues

A lógica como ciência remonta a Aristóteles (384-322 a.C.), seu criador. No século XVII Descartes (1596-1650) e Leibniz (1646-1716) tencionaram dotá-la de padrões matemáticos, o que pressupõe uma simbologia e um cálculo formal próprios. O alcance dessa lógica seria universal, aplicável a todos os campos do conhecimento. Mas nenhum dos dois deixou sobre o assunto senão alguns escritos fragmentados. Inclusive a contribuição de Leibniz, embora específica, somente em 1901 se tornou conhecida.

Assim é que o marco inicial da lógica simbólica, embora Leibniz seja considerado seu fundador, está fincado no ano de 1847, com a publicação das obras *Mathematical analysis of Logic*, de George Boole (1815-1864), e *Formal Logic*, de Augustus de Morgan (1806-1871).

De família modesta, Boole nasceu em Lincoln, na Inglaterra. Sua instrução formal não passou dos graus básicos, mas, dotado de grande inteligência, e vendo no conhecimento o caminho de seu gosto para ascender socialmente, enveredou pelo autodidatismo. De início aprendeu por si só latim e grego. Depois, como professor de uma escola elementar, resolveu ampliar seus conhecimentos de matemática, pondo-se a estudar, entre outras, as obras clássicas de Laplace e Lagrange. O interesse pela lógica certamente derivou de seu

UNIVERSAL IMAGES GROUP/UNIVERSAL HISTORY ARCHIVE/DIOMEDIA

George Boole (1815-1864).

relacionamento com De Morgan, de quem ficara amigo. Sua obra citada, embora não lhe trouxesse grande fama, propiciou-lhe, dois anos depois de publicada, uma nomeação de professor no recém-criado Queens College, em Cork, Irlanda.

Em 1854 Boole lança sua obra-prima, *Investigation of the laws of thought* (*As leis do pensamento* — como usualmente é conhecida), na qual elucida e amplia as ideias de 1847. A finalidade era ainda expressar simbolicamente as leis do pensamento, visando poder usar de maneira mais direta e precisa a dedução lógica.

Boole procurava transformar certos processos elementares do raciocínio em axiomas da lógica. A chamada álgebra dos conjuntos ou álgebra de Boole, introduzida por ele em *As leis do pensamento*, dá bem uma ideia disso. Boole usava as letras x, y, z, ... para indicar partes (subconjuntos) de um conjunto tomado como universo. Se x e y denotavam duas dessas partes, o que hoje chamamos de **interseção** e **união**, Boole indicava por xy e $x + y$, respectivamente. (Os símbolos atuais $\cap$ e $\cup$ são devidos a Giuseppe Peano (1858-1932).) Na verdade, as uniões consideradas por Boole pressupunham partes disjuntas; a generalização, para o conceito atual, é devida a W. S. Jevons (1835-1882).

Assim, sendo óbvio para o espírito que $xy = yx$ e $x + y = y + x$, $(xy)z = x(yz)$ e $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x(y + z) = xy + xz$, essas leis foram tomadas como axiomas de sua álgebra. Até aí não há diferença entre as álgebras usuais e a de Boole, sob o aspecto estrutural. Mas nesta última há leis particulares, como $x^2 = xx = x$ e $x + x = x$. Ou ainda, simbolizando por 1 o conjunto universo (notação de Boole): $1 + 1 = 1$.

Um exemplo menos imediato envolve a lei do terceiro excluído. Por exemplo, se 1 indica o conjunto de todos os seres vivos e x o conjunto dos gatos, como $1 - x$ era para Boole o complemento de x, então $x + (1 - x) = 1$ traduz a lei referida: todo ser vivo ou é gato ou não é gato.

Não passou despercebida a Boole a semelhança entre a álgebra dos conjuntos e a das proposições. Assim é que para duas proposições p e q indicava por pq a conjunção "p e q" e por $p + q$ a disjunção "p ou q". A afirmação $x = 1$ significa, nesse contexto, que x é verdadeira, e $x = 0$ significa que x é falsa. Mas Boole não foi longe com esse assunto.

Porém já tinha feito o bastante para ser considerado pelo grande matemático e filósofo galês do século XX, Bertrand Russel (1872-1970) (ver páginas 247 e 248), como o descobridor da matemática pura.

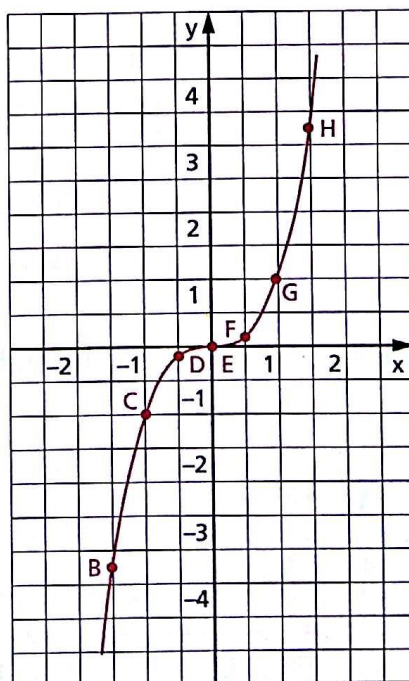
Outras funções elementares

I. Função $f(x) = x^3$

135. Façamos um estudo da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $x^3 \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3$$

Vamos inicialmente construir a tabela:

x	x^3	ponto
-2	-8	A
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{27}{8}$	B
-1	-1	C
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	D
0	0	E
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	F
1	1	G
$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{8}$	H
2	8	I
$\frac{5}{2}$	$\frac{125}{8}$	J
3	27	K

Observemos que a função $f(x) = x^3$:

a) é uma função crescente em $\mathbb{R}$, isto é:

$(\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R})\ (x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3)$

b) tem imagem $Im = \mathbb{R}$, pois, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^3$, isto é, $x = \sqrt[3]{y}$.

EXERCÍCIO

407. Faça o esboço dos gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = -x^3$

c) $f(x) = 2 - x^3$

d) $f(x) = (x + 1)^3$

e) $f(x) = (2 - x)^3$

f) $f(x) = (x - 1)^3 - 1$

g) $f(x) = 2 + (1 - x)^3$

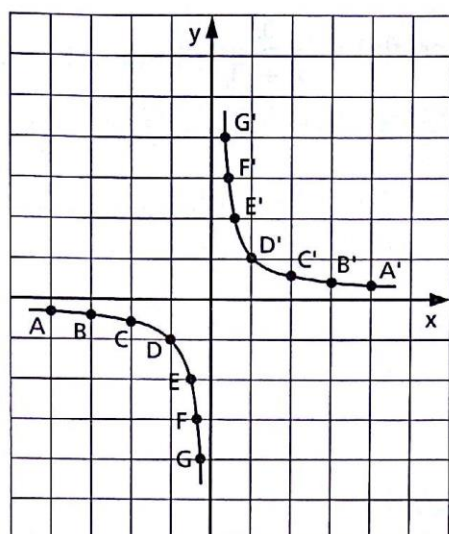
h) $f(x) = |x^3|$

II. Função recíproca

136. Uma aplicação *f* de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função recíproca** quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}^*$ associa o elemento $\frac{1}{x}$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Vamos inicialmente construir a tabela:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
ponto	A	B	C	D	E	F	G	G'	F'	E'	D'	C'	B'	A'

Observemos que a função recíproca $y = \dfrac{1}{x}$:

a) não é definida para $x = 0$;

b) tem imagem $\text{Im} = \mathbb{R}^*$, pois, dado um numeral real $y \neq 0$, sempre existe um *x* também real tal que $y = \dfrac{1}{x}$;

c) tem por gráfico uma hipérbole equilátera(*).

EXERCÍCIOS

408. Faça o esboço do gráfico das funções:

a) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$

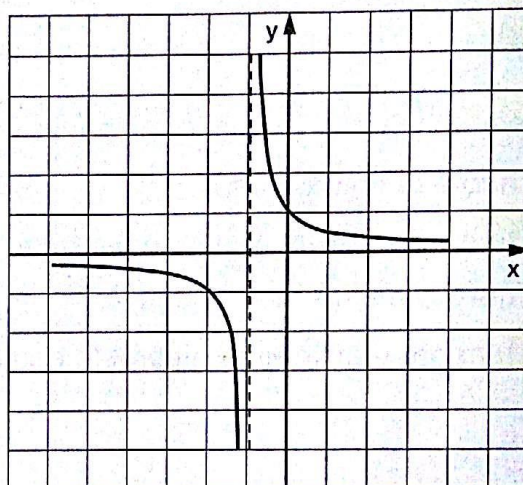
d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

(*) Isso está provado no livro de Geometria Analítica desta coleção.

409. Faça o esboço do gráfico $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$.

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $x + 1$, calculamos $\dfrac{1}{x + 1}$ e finalmente calculamos *x*:

x	$x + 1$	$y = \dfrac{1}{x + 1}$
-4	-3	$-\dfrac{1}{3}$
-3	-2	$-\dfrac{1}{2}$
-2	-1	-1
$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	-2
$-\dfrac{4}{3}$	$-\dfrac{1}{3}$	-3
$-\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	3
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	2
0	1	1
1	2	$\dfrac{1}{2}$
2	3	$\dfrac{1}{3}$

410. Faça o esboço gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{|x + 2|}$

411. Faça o esboço gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{2 - x}$

d) $f(x) = \left|\dfrac{x - 1}{x}\right|$

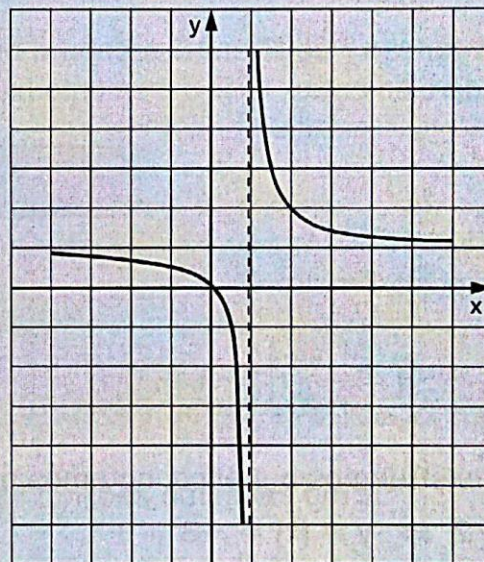
412. Faça o esboço gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Solução

Observemos que:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Vamos construir a tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $x - 1$, calculamos $1 + \dfrac{1}{x-1}$ e finalmente x.

x	x − 1	$y = 1 + \frac{1}{x-1}$
−2	−3	$\frac{2}{3}$
−1	−2	$\frac{1}{2}$
0	−1	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	−2
$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
2	1	2
3	2	$\frac{3}{2}$
4	3	$\frac{4}{3}$

413. Calcule o valor aproximado da área limitada pela curva $y = \dfrac{2}{x}$, pelo eixo 0x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$. Use no cálculo três trapézios de bases contidas nas retas $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$.

414. Represente, graficamente, a função definida por:

a) $f(x) = \dfrac{1}{4x - x^2 - 4}$

b) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$

c) $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

415. Determine os pontos de interseção das curvas $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = x^2$ algébrica e graficamente.

416. Chama-se **ponto fixo** de uma função *f* um número real *x* tal que $f(x) = x$. Calcule os pontos fixos da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

417. Esboce um gráfico e indique por meio de hachuras o conjunto dos pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem o seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leqslant xy \leqslant 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant 2 \end{cases}$$

III. Função máximo inteiro

137. Uma função *f* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função máximo inteiro** quando associa a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ o elemento $[x]$, que é o maior inteiro que não supera *x*.

$$f(x) = [x]$$

Assim, por exemplo:

$$[3{,}9] = \left[\frac{39}{10}\right] = 3, \ [-0{,}7] = \left[-\frac{7}{10}\right] = -1 \quad \text{e} \quad [4] = 4$$

Para construirmos o gráfico, notemos que:

$-3 \leqslant x < -2 \Rightarrow y = [x] = -3$

$-2 \leqslant x < -1 \Rightarrow y = [x] = -2$

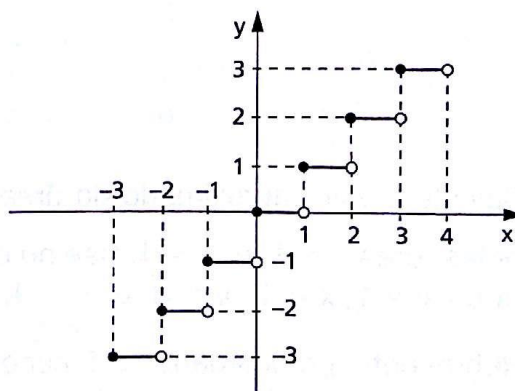
$-1 \leqslant x < 0 \Rightarrow y = [x] = -1$

$0 \leqslant x < 1 \Rightarrow y = [x] = 0$

$1 \leqslant x < 2 \Rightarrow y = [x] = 1$

$2 \leqslant x < 3 \Rightarrow y = [x] = 2$

$3 \leqslant x < 4 \Rightarrow y = [x] = 3$

etc.

A imagem da função máximo inteiro é o conjunto $\text{Im} = \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS

418. Construa o gráfico das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

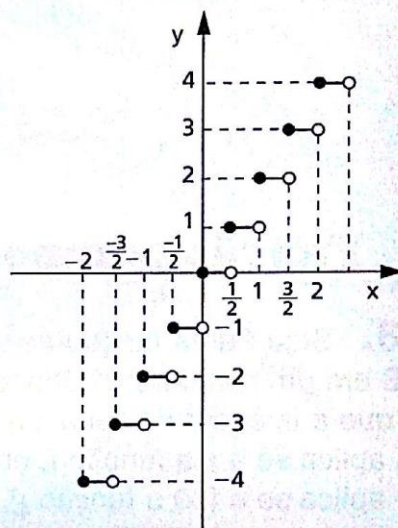
a) $f(x) = 2[x]$

b) $f(x) = -[x]$

419. Construa o gráfico da função real definida por $f(x) = [2x]$.

Solução

Vamos construir uma tabela da seguinte maneira: atribuímos valores a $2x$, calculamos $[2x]$ e finalmente x.

x	2x	y = [2x]
$-2 \leq x < -1{,}5$	$-4 \leq 2x < -3$	-4
$-1{,}5 \leq x < -1$	$-3 \leq 2x < -2$	-3
$-1 \leq x < -0{,}5$	$-2 \leq 2x < -1$	-2
$-0{,}5 \leq x < 0$	$-1 \leq 2x < 0$	-1
$0 \leq x < 0{,}5$	$0 \leq 2x < 1$	0
$0{,}5 \leq x < 1$	$1 \leq 2x < 2$	1
$1 \leq x < 1{,}5$	$2 \leq 2x < 3$	2
$1{,}5 \leq x < 2$	$3 \leq 2x < 4$	3
$2 \leq x < 2{,}5$	$4 \leq 2x < 5$	4

420. Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \left[\dfrac{x}{2}\right]$

b) $f(x) = [-x]$

c) $f(x) = [x - 1]$

d) $f(x) = [|x|]$

e) $f(x) = |[x]|$

f) $f(x) = [x]^2$

g) $f(x) = x - [x]$

h) $f(x) = x + [x]$

CAPÍTULO X

Função composta Função inversa

I. Função composta

138. Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C. Chama-se **função composta** de g e f à função h de A em C em que a imagem de cada x é obtida pelo seguinte procedimento:

1º) aplica-se a x a função f, obtendo-se f(x);

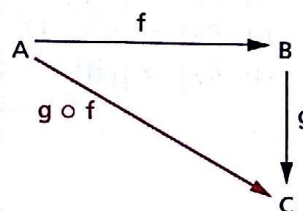
2º) aplica-se a f(x) a função g, obtendo-se g(f(x)).

Indica-se $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Pode-se indicar a composta por $g \circ f$ (lê-se: "g composta com f" ou "g círculo f"); portanto:

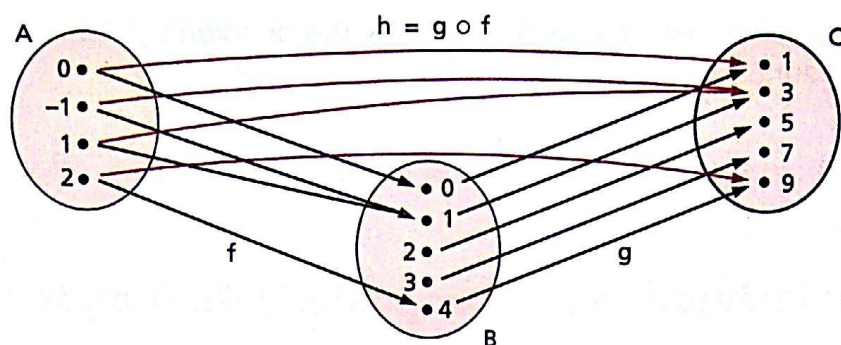
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para todo $x \in A$.

Podemos representar também a composta $g \circ f$ pelo diagrama ao lado.

Exemplos:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4)$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e as funções:

f, de A em B, definida por $f(x) = x^2$;

g, de B em C, definida por $g(x) = 2x + 1$.

Observemos, por exemplo, que: $f(2) = 4$, $g(4) = 9$ e $h(2) = 9$, isto é, $h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 9$.

Para obtermos a lei de correspondência da função composta $h = g \circ f$, fazemos assim: $g(f(x))$ é obtida a partir de $g(x)$ trocando-se x por $f(x)$.

No exemplo dado, temos:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1$$

Se vamos calcular $h(2)$, fazemos deste modo:

$$h(2) = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$$

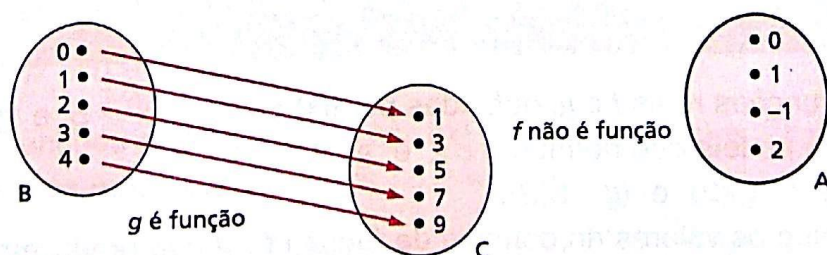
2º) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$. Notemos que a função composta $h = g \circ f$ é definida por:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 =$$
$$= x^2 + 3x + 3$$

Observações:

1ª) A composta $g \circ f$ só está definida quando o contradomínio da f é igual ao domínio da g. Em particular, se as funções f e g são de A em A, então as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ estão definidas e são funções de A em A.

2ª) Notemos que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$, isto é, a composição de funções não é comutativa.

Pode acontecer que somente uma das funções $f \circ g$ ou $g \circ f$ esteja definida. Assim, no primeiro exemplo, se tentarmos obter $f \circ g$, verificaremos que é impossível, pois: g é função de B em C, mas f não é função de C em A.

3ª) As duas composições, $f \circ g$ e $g \circ f$, estão definidas, mas $f \circ g \neq g \circ f$, como nos mostra o segundo exemplo:

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3x + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2 .$$

139. Associatividade da composição de funções

Teorema

Quaisquer que sejam as funções

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

tem-se:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demonstração:

Consideremos um elemento qualquer *x* de A e coloquemos $f(x) = y$, $g(y) = w$ e $h(w) = z$; temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

e notemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

portanto,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(w) = z$$

então, temos:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x),$$

para todo *x* de A.

EXERCÍCIOS

421. Sejam as funções reais *f* e *g*, definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

b) Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.

c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 16.

Solução

a) A lei que define $f \circ g$ é obtida a partir da lei de *f*, trocando-se *x* por g(x):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 4[g(x)] - 5 = (2x - 3)^2 + 4(2x - 3) - 5$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

A lei que define $g \circ f$ é obtida a partir da lei de *g*, trocando-se *x* por f(x):

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) - 3 = 2(x^2 + 4x - 5) - 3$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13$$

b) Calculemos $f \circ g$ para $x = 2$:

$$(f \circ g)(2) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 = 0$$

Calculemos $g \circ f$ para $x = 2$:

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 11$$

c) O problema em questão resume-se em resolver a equação

$$(f \circ g)(x) = 16$$

ou seja:

$$4x^2 - 4x - 8 = 16 \quad \Rightarrow \quad 4(x^2 - x - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

422. Sejam as funções reais *f* e *g* definidas por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = 1 - 2x$.
a) Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.
b) Calcule $(f \circ g)(-2)$ e $(g \circ f)(-2)$.
c) Determine os valores do domínio da função $f \circ g$ que produzem imagem 10.

423. Sejam as funções reais *f* e *g* definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

424. Sejam as funções reais *f* e *g*, definidas por $f(x) = 2$ e $g(x) = 3x - 1$. Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

425. Nas funções reais *f* e *g*, definidas por $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x - 3$, obtenha as leis que definem:
a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

426. Considere a função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Qual é a lei que define $f(-x)$? E $f\left(\frac{1}{x}\right)$? E $f(x - 1)$?

427. Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determine o valor de *a* de modo que se tenha $f \circ g = g \circ f$.

428. Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, mostre que $f \circ g = g \circ f$.

429. Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$. Mostre que, se $f \circ g = g \circ f$, então $f = g$.

430. Sejam as funções definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 3x - 4$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

Para que exista $(f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$, isto é: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 4$. Então:

$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 4\}$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 - 3 \cdot f(x) - 4 = |x| - 3\sqrt{x} - 4$

Para que exista $(g \circ f)(x) \in \mathbb{R}$, devemos ter $x \geqslant 0$. Então:

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

431. Sejam $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

432. Sejam as funções $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$, definida para todo *x* real e $x \neq 2$, e $g(x) = 2x + 3$, definida para todo *x* real. Forneça:

a) o domínio e a lei que define $f \circ g$;

b) o domínio e a lei que define $g \circ f$.

433. Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obtenha a lei que define $(h \circ g) \circ f$.

434. Sejam as funções reais $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obtenha a lei que define $h \circ (g \circ f)$.

435. Sendo $f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$ e $g(\theta) = \text{sen } 2\theta$, encontre os valores de θ para os quais $f \circ g$ se anula.

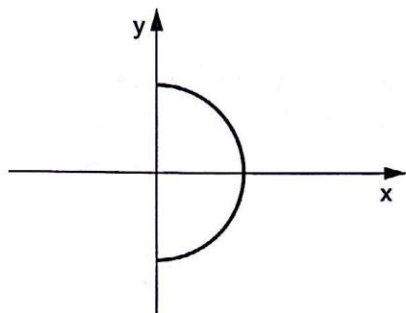
436. Considere as funções:

$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = ax + b$$

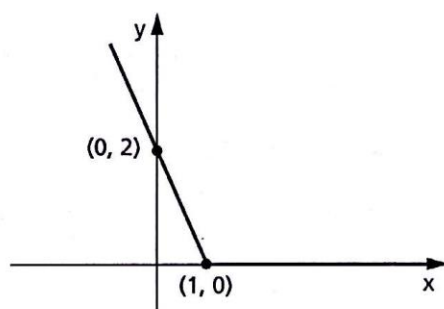
Determine o conjunto C dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f \circ g = g \circ f$.

437. Dadas as funções $f(x) = 2x + m$ e $g(x) = ax + 2$, qual é a relação que *a* e *m* devem satisfazer para que se tenha $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

438. Julgue os itens a seguir em verdadeiro ou falso.

a) A figura abaixo é gráfico de uma função definida para $y = f(x)$.

b) Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então $f(a + 1) = f(1 - a)$.

c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4, 7\}$, pode-se afirmar que o número de funções de A para B é igual a 3.

d) A representação gráfica de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1| - (x - 1)$ é o gráfico abaixo.

e) Para todo $x > 0$ temos que, se $f(x) = \frac{1}{x}$, então $f(x) < 1$.

f) Se *f* é uma função definida para todo inteiro tal que $f(0) = 1$, $f(n + 1) =$ $= f(n) + 3$, então $f(300) = 901$.

439. Dadas $f(x) = 3$ e $g(x) = x^2$, determine $f(g(x))$.

440. Se $f(x) = \frac{1}{1 - x}$, determine $(f \circ [f \circ f])(x)$.

441. Dadas as funções *f*, *g* e *h*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$ e $h(x) = x + 2$, obtenha $((h \circ f) \circ g)(2)$.

442. Dada a aplicação $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$, qual é o valor de *x* tal que $f(x) = f(x + 1)$?

443. Sejam *f* e *g* funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Determine a relação entre *a*, *b*, *c* e *d*, de modo que $f \circ g = g \circ f$.

444. Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determine a lei da função g.

Solução

Se $f(x) = 3x - 5$, então, trocando x por $g(x)$, temos:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 5$
mas é dado que: $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$, então
$3 \cdot g(x) - 5 = x^2 - 3$
ou seja:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

445. Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 7$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$. Determine a lei da função g.

446. Sejam as funções reais $g(x) = 3x - 2$ e $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determine a lei da função f.

Solução

Se $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 3x + 1$, então $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 1$.

Como $g(x) = 3x - 2$, decorre $x = \dfrac{g(x) + 2}{3}$ e então:

$$f(g(x)) = 9\left[\frac{g(x) + 2}{3}\right]^2 - 3 \cdot \left[\frac{g(x) + 2}{3}\right] + 1 =$$

$$= [g(x)]^2 + 4g(x) + 4 - g(x) - 2 + 1 = [g(x)]^2 + 3 \cdot g(x) + 3;$$

logo, $f(x) = x^2 + 3x + 3$.

447. Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determine a lei da função f.

448. Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$ e $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$ definidas para todo x real. Determine a lei da função f.

449. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo x real, calcule os valores de a e b.

450. Considere as funções

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x + b \qquad\qquad\qquad x \mapsto x^2$$

em que *b* é uma constante. Conhecendo a composta

$$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x)) = 4x^2 - 12x + 9$$

calcule o valor de *b*.

451. Se $f(x + 1) = \dfrac{3x + 5}{2x + 1}\left(x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$, qual é o domínio da função f(x) no conjunto dos números reais?

452. Sejam as funções reais $g(x) = 2x + 3$, definida para todo *x* real, e $g(f(x)) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$, definida para todo *x* real e $x \neq -1$. Calcule $f\left(-\dfrac{12}{15}\right)$.

453. Se $g(f(x)) = x^2 + 13x + 42$ e $g(x) = x^2 - x$, determine o termo independente de *x* na expressão de f(x), sabendo que f(x) é um polinômio com coeficientes positivos.

454. Sejam *f* e *g* funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x + k$ e $g(x) = -x + t$. Sabendo que $f(f(x)) = 4x - 3$ e $f(g(x)) = g(f(x))$, determine:

a) os valores de *k* e *t*;

b) os números reais *x*, tais que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$.

455. Sejam *f* e *g* funções reais definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 3x + 4 & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

Obtenha a lei que define $f \circ g$.

Solução

Fazendo $g(x) = y$, temos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y)$.
Temos de examinar dois casos:

1º) $y \geqslant 1$

$y \geqslant 1 \iff g(x) \geqslant 1 \iff x - 3 \geqslant 1 \iff x \geqslant 4$

$y \geqslant 1 \Rightarrow f(y) = y^2 + 2y + 4 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 \cdot g(x) + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 2(x - 3) + 4 = x^2 - 4x + 7$

2º) $y < 1$

$y < 1 \iff g(x) < 1 \iff x - 3 < 1 \iff x < 4$

$y < 1 \Rightarrow f(y) = 3y + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 3(x - 3) + 4 = 3x - 5$

Conclusão: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 & \text{se } x \geqslant 4 \\ 3x - 5 & \text{se } x < 4 \end{cases}$

456. Sejam *f* e *g* as funções reais definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \geqslant 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 3.$$

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$

457. Sejam as funções reais *f* e *g* definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 4 - x^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

e $g(x) = 2 - 3x$.

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

458. Sejam as funções reais *f* e *g* definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ 1 - x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \end{cases}.$$

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

459. Sejam as funções reais *g* e $f \circ g$ definidas por $g(x) = 2x - 3$ e

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 4x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Obtenha a lei que define *f*.

II. Função sobrejetora

140. Uma função *f* de A em B é **sobrejetora** se, e somente se, para todo *y* pertencente a B existe um elemento *x* pertencente a A tal que:

$$f(x) = y$$

Em símbolos:

$f: A \rightarrow B$
f é sobrejetora $\Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A \mid f(x) = y$

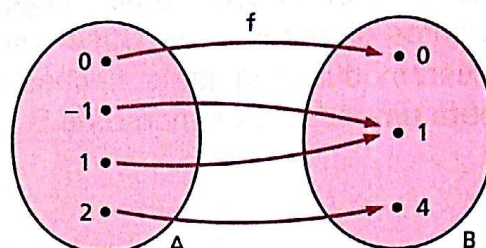
Notemos que $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(f) = B$.

$f: A \rightarrow B$
f é sobrejetora $\Leftrightarrow Im(f) = B$

Em lugar de dizermos "*f* é uma função sobrejetora de A em B", poderemos dizer "*f* é uma **sobrejeção** de A em B".

Exemplos:

1º) A função *f* de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{0, 1, 4\}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ é sobrejetora, pois, para todo elemento $y \in B$, existe o elemento $x \in A$ tal que $y = x^2$.

Observemos que para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.

2º) A função *f* de $A = \mathbb{R}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ é sobrejetora, pois, para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = x^2 + 1$, bastando para isso tomar $x = \sqrt{y - 1}$ ou $x = -\sqrt{y - 1}$.

III. Função injetora

141. Uma função *f* de A em B é **injetora** se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em símbolos:

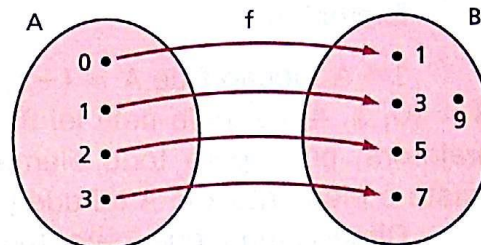
$$f: A \to B$$
$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A, \ \forall x_2, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Notemos que a definição proposta é equivalente a: uma função *f* de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

$$f: A \to B$$
$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A, \ \forall x_2, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Em lugar de dizermos "*f* é uma função injetora de A em B", poderemos dizer "*f* é uma **injeção** de A em B".

Exemplos:

1º) A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ definida pela lei $f(x) = 2x + 1$ é injetora, pois dois elementos distintos de A têm como imagem dois elementos distintos de B. Observemos que não existem duas ou mais flechas convergindo para um mesmo elemento de B.

2º) A função de $A = \mathbb{N}$ em $B = \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x$ é injetora, pois, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{N}$, se $x_1 \neq x_2$, então $2x_1 \neq 2x_2$.

3º) A função de $A = \mathbb{R}^*$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é injetora, pois, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}^*$, se $x_1 \neq x_2$, então $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

IV. Função bijetora

142. Uma função f de A em B é **bijetora** se, e somente se, f é sobrejetora e injetora.

Em símbolos:

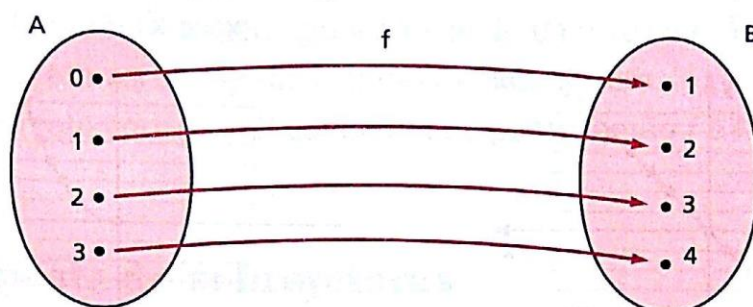
$$f: A \to B$$
$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow f \text{ é sobrejetora e injetora}$$

A definição acima é equivalente a: uma função f de A em B é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento y pertencente a B, existe um único elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

$$f: A \to B$$
$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A \mid f(x) = y$$

Em lugar de dizermos "f é uma função bijetora de A em B", poderemos dizer "f é uma **bijeção** de A em B".

Exemplos:

1º) A função f de $A = \{0, 1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(x) = x + 1$ é bijetora

pois f é sobrejetora e injetora, isto é, para todo elemento $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$, tal que $y = x + 1$. Observemos que para cada elemento de B converge uma só flecha.

2º) A função f de $A = \mathbb{R}$ em $B = \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ é bijetora, pois:

a) qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 2$, basta tomarmos $x = \dfrac{y - 2}{3}$. Logo, f é sobrejetora;

b) quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, então $3x_1 + 2 \neq 3x_2 + 2$, isto é, f é injetora.

Observação:

Observemos que existem funções que não são sobrejetoras nem injetoras.

Por exemplo, na função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$:

a) dado $y \in \mathbb{R}^*_-$, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = |x|$, portanto f não é sobrejetora;

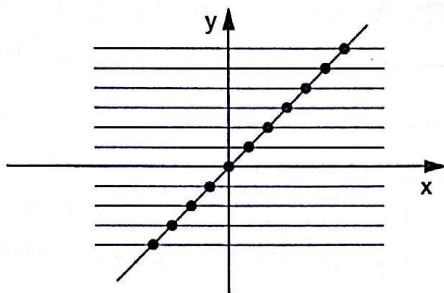
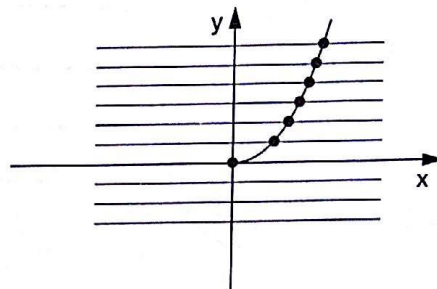
b) existem x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, x_1 e x_2 opostos (portanto $x_1 \neq x_2$) tais que $|x_1| = |x_2|$, isto é, f não é injetora.

143. Reconhecimento através do gráfico

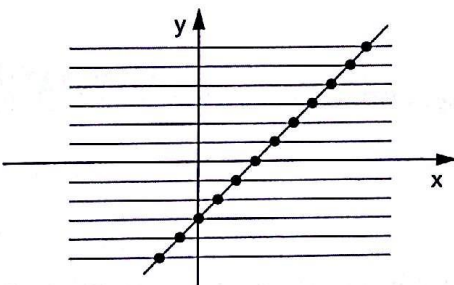
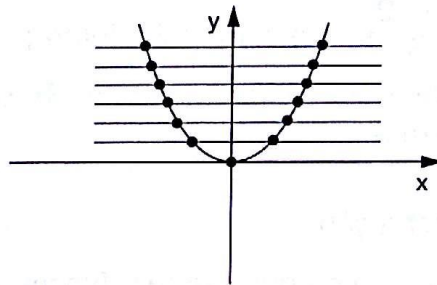
Pela representação cartesiana de uma função f, podemos verificar se f é injetora, sobrejetora ou bijetora. Para isso, basta analisarmos o número de pontos de interseção das retas paralelas ao eixo x, conduzidas por cada ponto $(0, y)$ em que $y \in B$ (contradomínio de f).

1º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é **injetora**.

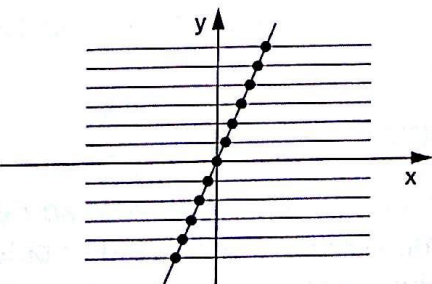
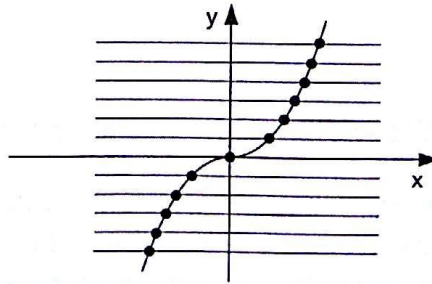
Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x$

b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

2º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos, então a função é **sobrejetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x - 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2$

3º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é **bijetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x \cdot |x|$

Resumo

Dada a função f de A em B, consideram-se as retas horizontais por (0, y) com $y \in B$:

I) se nenhuma reta corta o gráfico mais de uma vez, então f é **injetora.**

II) se toda reta corta o gráfico, então f é **sobrejetora.**

III) se toda reta corta o gráfico em um só ponto, então f é **bijetora.**

144. Composta de sobrejetoras

Teorema

Se duas funções, f de A em B e g de B em C, são sobrejetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também sobrejetora.

Demonstração:

A função g é sobrejetora; então, para todo z de C, existe y em B tal que $g(y) = z$. A função f é sobrejetora, isto é, dado y em B, existe x em A tal que $f(x) = y$.

Logo, para todo z em C, existe x em A tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

o que prova que $g \circ f$ é sobrejetora.

145. Composta de injetoras

Teorema

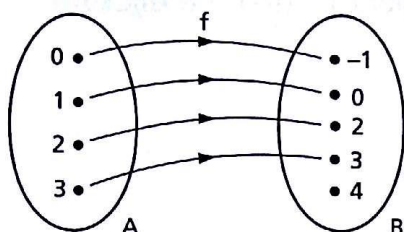
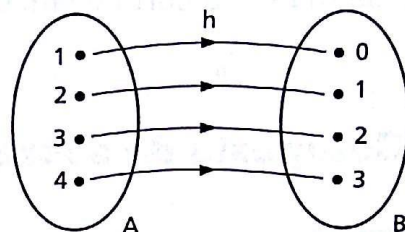
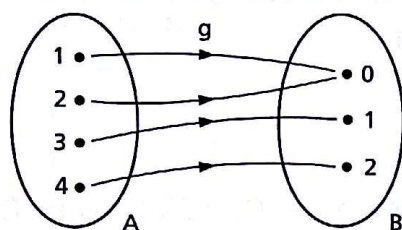
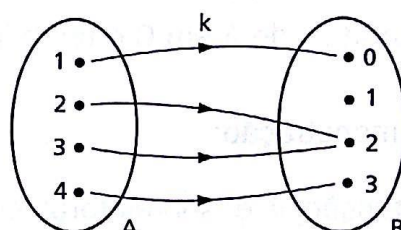
Se duas funções, f de A em B e g de B em C, são injetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é também injetora.

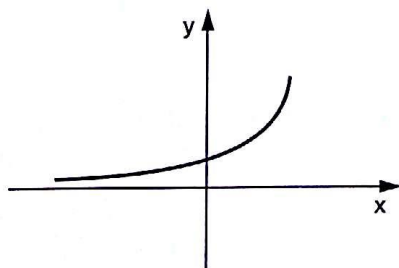
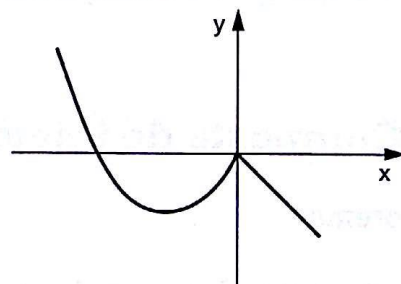
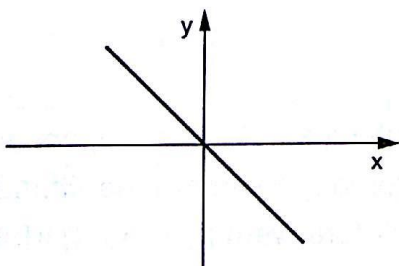
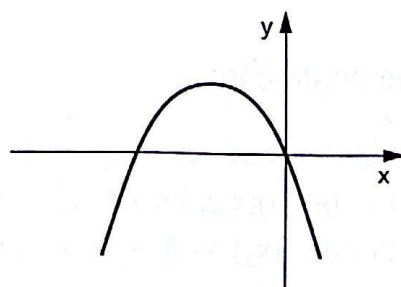
Demonstração:

Consideremos x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de A e suponhamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, isto é, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é injetora, da última igualdade resulta que $f(x_1) = f(x_2)$; como f é também injetora, vem $x_1 = x_2$; portanto, $g \circ f$ é injetora.

EXERCÍCIOS

460. Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora.

a)

c)

b)

d)

461. Entre as funções em $\mathbb{R}$ abaixo representadas, qual é injetora? E sobrejetora? E bijetora?

a)

c)

b)

d)

462. Classifique as funções seguintes em:

I) injetora
II) sobrejetora
III) bijetora
IV) não é sobrejetora nem injetora

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $h(x) = |x - 1|$
d) $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$
e) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $n(x) = [x]$
f) $p: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$
g) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^3$
h) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = |x| \cdot (x - 1)$

463. Determine o valor de *b* em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant b\}$ de modo que a função *f* de $\mathbb{R}$ em B, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 6$, seja sobrejetora.

464. Determine o maior valor de *a* em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ de modo que a função *f* de A em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, seja injetora.

465. Seja a função de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < 2\}$ em $B \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 3| - 2$. Se *f* é sobrejetora, determine B.

466. Determine o conjunto B de modo que a função $f: [-1, 2] \to B$, definida por $f(x) = |2x - 3|$, seja sobrejetiva. Essa função é injetiva? Justifique.

467. Dada as funções seguintes, classifique-as em:

I) injetora
II) sobrejetora
III) bijetora
IV) não é injetora nem sobrejetora

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \leqslant -1 \end{cases}$$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x \geqslant 2 \\ x - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

d) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$m(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

e) $n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é par} \\ \dfrac{x + 1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

f) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ [x] & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

468. Classifique em injetora, sobrejetora ou bijetora a aplicação $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

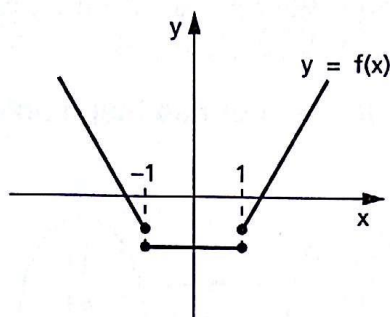
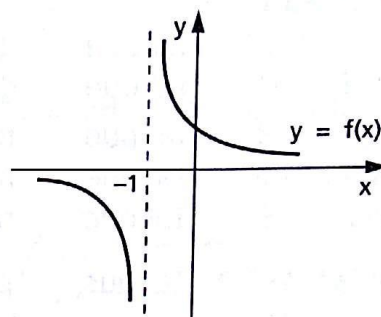
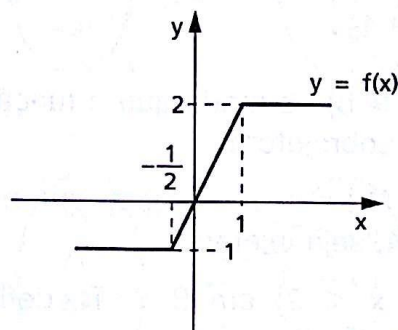
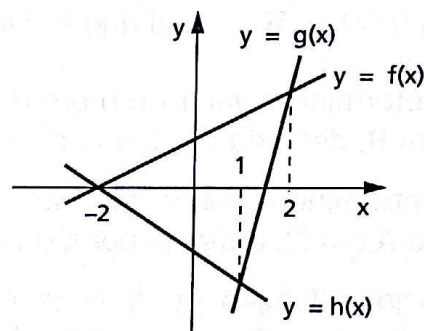
$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n + 1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

469. Observando os gráficos, julgue os itens seguintes.

(I)

(III)

(II)

(IV)

a) O domínio da função em (I) é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ ou } x \neq 1\}$.

b) A imagem da função em (II) é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 2\}$.

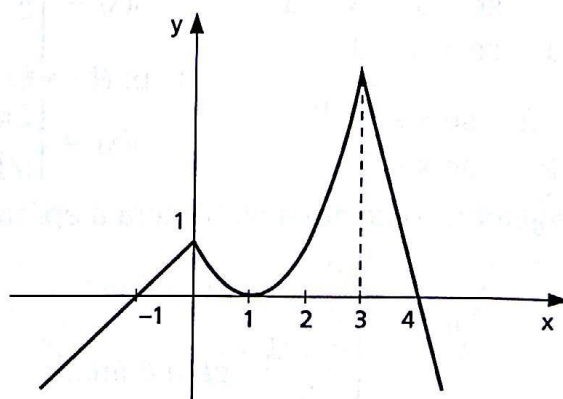
c) A função em (III) é decrescente no intervalo $(-1, +\infty)$.

d) Com relação a (IV), podemos dizer que $h(x) < g(x) \leqslant f(x)$ para $1 < x \leqslant 2$.

e) A função em (I) é injetora.

f) Em (II) $f(0) = 0$ e $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

g) Em (III) a função é negativa para $x < -1$ e positiva para $x > -1$.

470. Com relação ao gráfico de uma função $y = f(x)$, representado abaixo, pode-se afirmar que:

a) o domínio da função é o conjunto dos números reais;

b) a imagem da função é o conjunto dos números reais;

c) a função é crescente no intervalo $(-\infty, 0]$;

d) a função é injetora em todo o seu domínio;

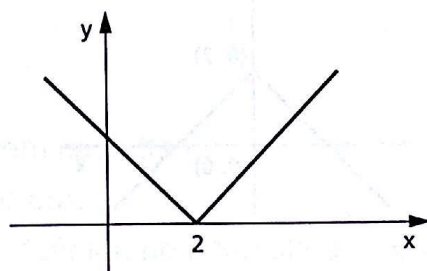
e) $f(1) = 0$ e $f(5) < 0$;

f) $\left(\frac{1}{2}\right) < 1$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) < 1$;

g) sabendo que no intervalo $[0, 3]$ a curva representa um arco de parábola, podemos concluir que a equação dessa parábola é $y = x^2 - 2x + 1$;

h) a semirreta correspondente a $x \leqslant 0$ tem inclinação -1.

471. Sendo a função real $f(x) = |x - 2| + |x|$, pode-se afirmar:

a) o gráfico da função é:

b) a função cresce no intervalo $[2, +\infty[$;

c) $f(x) = 2x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$;

d) o conjunto imagem da função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$;

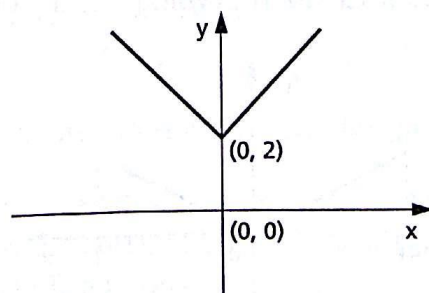
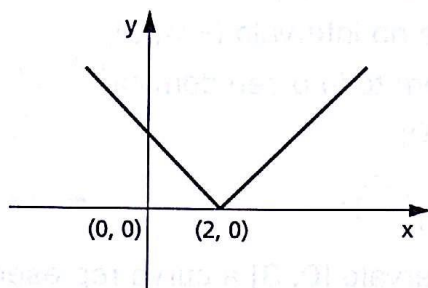
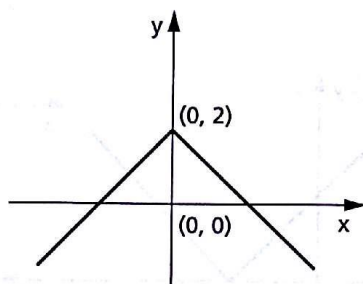
e) a função não é injetora;

f) o conjunto domínio da função é $\mathbb{R}$.

472. Considere a função definida por $y = f(x) = 2 - |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Indique por V as proposições verdadeiras e F as proposições falsas:

a) *f* é sobrejetiva.

b) *f* não é injetiva.

c) A função pode ser representada pelo gráfico:

d) A função pode ser representada pelo gráfico:

e) A função pode ser representada pelo gráfico:

473. A função f: A → B é dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

a) Determine o domínio de *f*, isto é, $A = \{x \in \mathbb{R}$ tal que existe $f(x)\}$.

b) Determine a imagem de *f*, isto é, $B = f(A)$.

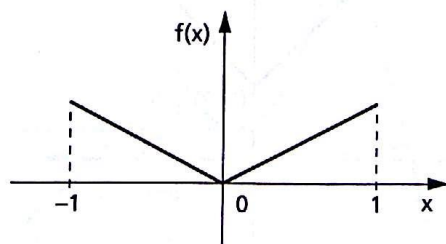
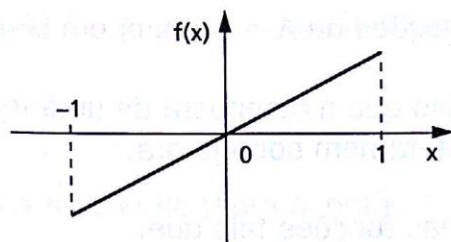
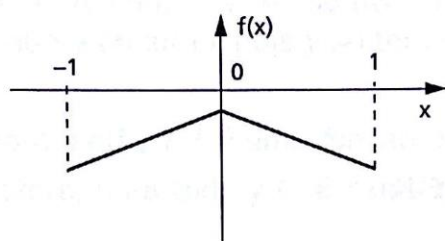
c) A função *f* é injetora? Por quê?

d) Trace o gráfico da função *f*.

474. Existem funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem a propriedade (I) $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assinale com V as proposições verdadeiras e F as proposições falsas:

a) Se uma função *f* verifica (I), então *f* é injetora.

b) A condição (I) é válida para a função $f(x) = 3x^5$, $x \in \mathbb{R}$.

c) O gráfico abaixo representa, no intervalo $[-1, 1]$, uma função que verifica (I).

d) O gráfico abaixo representa, no intervalo $[-1, 1]$, uma função para a qual vale (I).

e) O gráfico abaixo representa uma função que satisfaz a propriedade (I).

475. Faça o que se pede em cada item.

a) Defina função bijetora.

b) Demonstre que *f*, definida no intervalo $0 < x < s$ $(s > 0)$ do seguinte modo:

$f(x) = \dfrac{2x - s}{x(s - x)}$, é uma função bijetora desse intervalo nos reais.

476. Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função que satisfaz as propriedades:

1ª) dado qualquer $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geqslant m$;

2ª) $A_r = \{s \in \mathbb{N};\ s \leqslant f(r)\}$ está contido no conjunto imagem de *f*, para todo $r \in \mathbb{N}$.

Mostre que *f* é sobrejetora.

477. Sejam as funções: *f* de A em B, definida por $y = f(x)$; identidade em A, anotada por I_A, de A em A e definida por $I_A(x) = x$; identidade em B, anotada por I_B, de B em B e definida por $I_B(x) = x$. Prove que:

$$f \circ I_A = f \quad \text{e} \quad I_B \circ f = f$$

478. As funções I_A e I_B do exercício anterior são iguais? Justifique.

479. Os conjuntos A e B têm, respectivamente, *m* e *n* elementos. Considera-se uma função $f\colon A \to B$. Qual a condição sobre *m* e *n* para que *f* possa ser injetora? E para *f* ser sobrejetora? E bijetora?

480. Quantas são as injeções de $A = \{a, b\}$ em $B = \{c, d, e, f\}$?

481. Quantas são as sobrejeções de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{d, e\}$?

482. Mostre com um exemplo que a composta de uma injeção com uma sobrejeção pode não ser nem injetora nem sobrejetora.

483. Sejam *f* e *g*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que:

a) $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora. Prove que *f* é injetora.

b) $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora. Prove que *g* é sobrejetora.

V. Função inversa

146. Exemplo preliminar

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, consideremos a função *f* de A em B definida por $f(x) = 2x - 1$.

Notemos que a função *f* é bijetora formada pelos pares ordenados

$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$

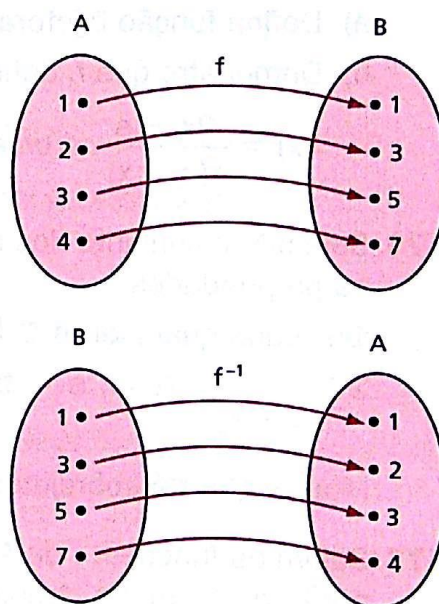
em que $D(f) = A$ e $Im(f) = B$.

A relação $f^{-1} = \{(x, y) \mid (x, y) \in f\}$, inversa de *f*, é também uma função, pois *f* é uma bijeção de A em B, isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

A função f^{-1} é formada pelos pares ordenados $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$ em que $D(f^{-1}) = B$ e $Im(f^{-1}) = A$.

Observemos que a função *f* é definida pela sentença $y = 2x - 1$, e f^{-1} é definida pela sentença $x = \frac{y + 1}{2}$, isto é:

1º) *f* leva cada elemento $x \in A$ até o $y \in B$ tal que $y = 2x - 1$;

2º) f^{-1} leva cada elemento $y \in B$ até o $x \in A$ tal que $x = \frac{y + 1}{2}$.

147. Teorema

Seja $f: A \to B$. A relação f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, *f* é bijetora.

Demonstração:

1ª parte: Se f^{-1} é uma função de B em A, então *f* é bijetora.

a) Para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$, isto é, $(y, x) \in f^{-1}$, ou, ainda, $(x, y) \in f$. Assim, *f* é sobrejetora.

b) Dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$ resultará $f^{-1}(y) = x_1$ e $f^{-1}(y) = x_2$, o que é absurdo, pois *y* só tem uma imagem em f^{-1}. Assim, $f(x_1) \neq f(x_2)$ e *f* é injetora.

2ª parte: Se *f* é bijetora, então f^{-1} é uma função de B em A.

a) Como *f* é sobrejetora, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto, $(y, x) \in f^{-1}$.

b) Se $y \in B$, para duas imagens x_1 e x_2 em f^{-1}, vem:

$$(y, x_1) \in f^{-1} \quad \text{e} \quad (y, x_2) \in f^{-1}$$

portanto:

$$(x_1, y) \in f \quad \text{e} \quad (x_2, y) \in f$$

Como *f* é injetora, resulta $x_1 = x_2$.

148. Definição

Se *f* é uma função bijetora de A em B, a relação inversa de *f* é uma função de B em A que denominamos **função inversa** de *f* e indicamos por f^{-1}.

Observações:

1ª) Os pares ordenados que formam f^{-1} podem ser obtidos dos pares ordenados de *f*, permutando-se os elementos de cada par, isto é:

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

2ª) Pela observação anterior, temos:

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

Agora, se considerarmos a função inversa de f^{-1}, teremos:

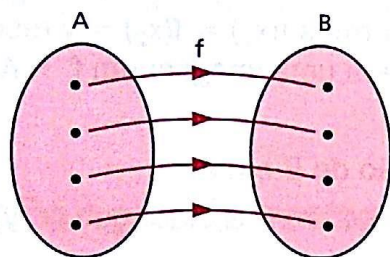
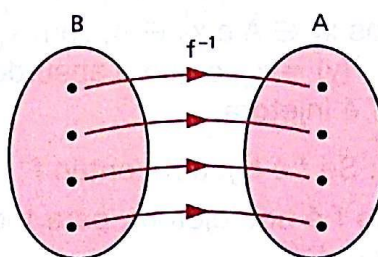
$$(y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in (f^{-1})^{-1}$$

isto é, a inversa de f^{-1} é a própria função *f*:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Podemos assim afirmar que *f* e f^{-1} são **inversas entre si**, ou melhor, **uma é inversa da outra**.

3ª) O domínio da função f^{-1} é B, que é a imagem da função *f*.

A imagem da função f^{-1} é A, que é o domínio da função *f*.

$D(f^{-1}) = B = Im(f)$ e $Im(f^{-1}) = A = D(f)$

149. Determinação da função inversa

Vimos no exemplo preliminar que, se a função *f* é definida pela sentença aberta $y = 2x - 1$, então a função inversa f^{-1} é definida pela sentença $x = \dfrac{y + 1}{2}$.

Observemos, por exemplo, que $x = 2$ e $y = 3$ satisfazem a condição $y = 2x - 1$ e também $x = \dfrac{y + 1}{2}$. Isso não quer dizer que o par ordenado (2, 3) pertença a *f* e a f^{-1}. De fato:

$$(2, 3) \in f \quad \text{e} \quad (3, 2) \in f^{-1}$$

As sentenças abertas $y = 2x - 1$ e $x = \dfrac{y + 1}{2}$ não especificam qual (*x*? ou *y*?) é o primeiro termo do par ordenado.

Ao construirmos o gráfico cartesiano da função *f*, colocamos *x* em abscissas e *y* em ordenadas, isto é:

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

Ao representarmos no mesmo plano cartesiano o gráfico de f^{-1}, como o conjunto

$$f^{-1} = \left\{(y, x) \in B \times A \mid x = \frac{y + 1}{2}\right\}$$

devemos ter *y* em abscissa e *x* em ordenada.

A fim de que possamos convencionar que:

1º) dada uma sentença aberta que define uma função, x representa sempre o primeiro termo dos pares ordenados e;

2º) dois gráficos de funções distintas podem ser construídos no mesmo plano cartesiano com x em abscissas e y em ordenadas;

justifica-se a regra prática seguinte.

Regra prática

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença $y = f(x)$, para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

1º) na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$;

2º) transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplos:

1º) Qual é a função inversa da função f, bijetora em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 2$?

A função dada é $f(x) = y = 3x + 2$.

Aplicando a regra prática:

I) permutamos as variáveis: $x = 3y + 2$

II) expressamos y em função de x:

$$x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$$

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

2º) Qual é a função inversa da função f, bijetora em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$?

A função dada é $f(x) = y = x^3$.

Aplicando a regra prática, temos: $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$.

Resposta: É a função f^{-1} em $\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

150. Propriedade dos gráficos de f e f^{-1}

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.

Observemos inicialmente que, se $(a, b) \in f$, então $(b, a) \in f^{-1}$.

Para provarmos que os pontos P(a, b) e Q(b, a) são simétricos em relação à reta r de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3), devemos provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r e que as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais.

O ponto M, médio do segmento $\overline{PQ}$, tem coordenadas $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, portanto M pertence à reta r. Como M é ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, isto é, $MP = MQ$, $M \in r$, está então provado que os pontos P e Q equidistam da reta r.

Para provarmos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r, consideremos o ponto R(c, c) da reta r, distinto de M, e provemos que o triângulo PMR é retângulo em M.

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR, encontramos:

$$PM^2 = \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$MR^2 = \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2$$

$$PR^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2$$

e observemos que:

$$PM^2 + MR^2 = 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2} - c\right)^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} -$$
$$- 2(a+b) \cdot c + 2c^2 = a^2 + b^2 - 2ac - 2bc + 2c^2 = (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) =$$
$$= (a-c)^2 + (b-c)^2 = PR^2$$

Exemplos:

Vamos construir no mesmo diagrama os gráficos de duas funções inversas entre si:

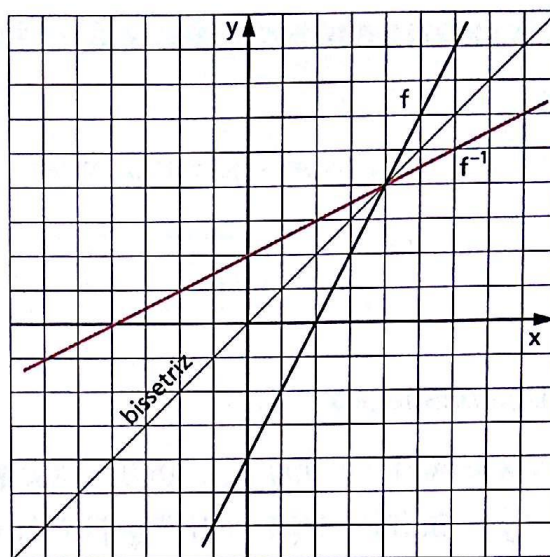
1º) $f(x) = 2x - 4$ e $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

2º) $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

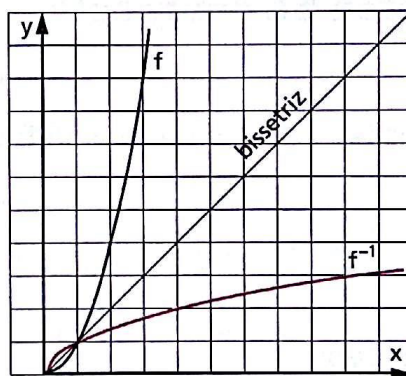
3º) $f(x) = x^3$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

1º) $y = 2x - 4$ $\qquad y = \dfrac{x + 4}{2}$

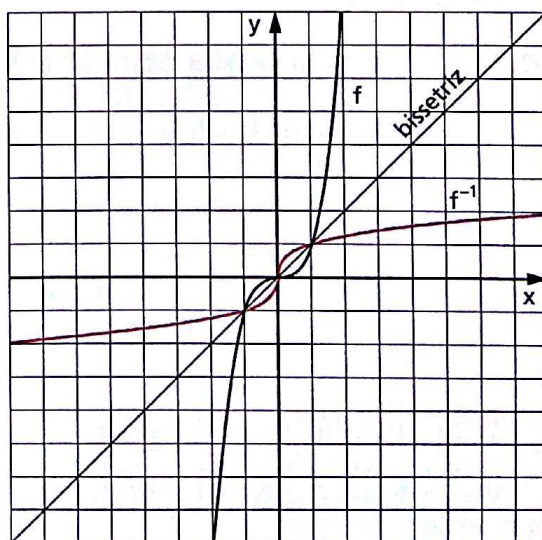
x	y
−4	−12
−3	−10
−2	−8
−1	−6
0	−4
1	−2
2	0
3	2
4	4

x	y
−12	−4
−10	−3
−8	−2
−6	−1
−4	0
−2	1
0	2
2	3
4	4

2º) $y = x^2$ $\qquad y = \sqrt{x}$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6

3º) $y = x^3$ $\qquad y = \sqrt[3]{x}$

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

x	y
−27	−3
−8	−2
−1	−1
0	0
1	1
8	2
27	3

151. A composta de funções inversas entre si

Teorema

Seja *f* uma função bijetora de A em B. Se f^{-1} é a função inversa de *f*, então:

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

Demonstração:

$\forall\, x \in A, (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

$\forall\, y \in B, (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

152. A inversa da composta

Teorema

Se as funções *f* de A em B e *g* de B em C são bijetoras, então:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Demonstração:

Observemos inicialmente: se as funções *f* de A em B e *g* de B em C são bijetoras, então a função composta $g \circ f$ de A em C é bijetora; logo, existe a função inversa $(g \circ f)^{-1}$ de C em A.

Queremos provar que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$; então basta provar que:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_A \quad \text{e} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_C$$

Notemos que:

$$f^{-1} \circ f = I_A, \; f \circ f^{-1} = I_B, \; g^{-1} \circ g = I_B \quad \text{e} \quad g \circ g^{-1} = I_C$$

Então:

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = [(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g] \circ f = [f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)] \circ f = [f^{-1} \circ I_B] \circ f = f^{-1} \circ f = I_A$

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = [(g \circ f) \circ f^{-1}] \circ g^{-1} = [g \circ (f \circ f^{-1})] \circ g^{-1} = (g \circ I_B) \circ g^{-1} =$
$= g \circ g^{-1} = I_C$

EXERCÍCIOS

484. Prove que cada função abaixo é bijetora e determine sua inversa:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 5$

b) $g: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 4}$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^5$

485. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1|$.
Calcule a soma dos números associados à(s) alternativa(s) correta(s).

01) A função *f* não é sobrejetiva.
02) A função *f* é injetiva.
04) A função *f* possui uma inversa.
08) $f(x) \leqslant 1$ se, e somente se, $0 \leqslant x \leqslant 2$.
16) *f* é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$.
32) *f* é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(-x)$.
64) *f* é uma função periódica de período 1.

486. Nas funções bijetoras abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obtenha a lei de correspondência que define a função inversa.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$

c) $h(x) = x^3 + 2$

d) $p(x) = (x - 1)^3 + 2$

e) $q(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

f) $r(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

g) $s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

487. O gráfico de uma função *f* é o segmento de reta que une os pontos $(-3, 4)$ e $(3, 0)$. Se f^{-1} é a função de *f*, determine $f^{-1}(2)$.

488. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bijetora, definida por $f(x) = x^3 + 1$, determine sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

489. A função *f* em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, admite função inversa? Justifique.

490. Julgue os itens abaixo.

a) Sendo $y = f(x)$ uma função real, se $f(x) = x$ para algum *x*, dizemos que *x* é um ponto fixo de *f*.

Com base nessa definição, pode-se concluir que a função $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ possui um único ponto fixo.

b) Os zeros da função $f(x) = 5^{x^2} - 5^{3x}$ são $x = 0$ e $x = 3$.

c) O domínio da função real $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\log x}$ é o conjunto dos números reais com exceção do zero.

d) Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções injetoras, então a composta $g \circ f: A \to C$ também é uma função injetora.

e) Toda função real é inversível.

491. Seja a função *f* de $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$. Qual é a função inversa de *f*?

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2$, com $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$.
Aplicando a regra prática, temos:

I) permutando as variáveis:

$x = y^2 \quad \text{com} \quad y \leqslant 0 \quad \text{e} \quad x \geqslant 0$

II) expressando *y* em função de *x*:

$x = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{x}$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \leqslant 0$ e $x \geqslant 0$, a lei de correspondência da função inversa será $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Resposta: É a função f^{-1} de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_-$, definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

492. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2$

b) $f: A \to \mathbb{R}_+$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$
$f(x) = (x - 1)^2$

c) $f: A \to \mathbb{R}_-$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
$f(x) = -(x - 2)^2$

d) $f: A \to \mathbb{R}_-$, em que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$
$f(x) = -(x + 1)^2$

e) $f: \mathbb{R}_- \to B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$
$f(x) = x^2 + 1$

f) $f: \mathbb{R}_+ \to B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$
$f(x) = 4 - x^2$

g) $f: \mathbb{R}_- \to B$, em que $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
$f(x) = x^2 - 1$

493. Considere a função f: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = 2 - \frac{2}{\pi}x$.

Esboce o gráfico correspondente e decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas.

a) *f* é crescente.

b) *f* é sobrejetora.

c) *f* possui inversa e $f^{-1}(0) = \pi$.

d) *f* possui inversa e $f^{-1}(0) = 0$.

e) *f* não possui inversa.

494. Considerando a função real $f(x) = 3 + 2^{x-1}$ e sendo $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ a sua inversa, pode-se afirmar:

a) A imagem de *f* é A.

b) O gráfico de *f* está acima da reta $y = 4$.

c) $g\left(\frac{11}{2}\right) = \log_2 5$.

d) Se $f(h(x)) = 3 + 2x$, então $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

e) O conjunto solução da inequação $f(2x + 1) < 1 + 3 \cdot 2^x$ é o intervalo $]0, 1[$.

f) O gráfico da função *g* intercepta o eixo Ox no ponto (1, 0).

495. Seja a função bijetora *f*, de $\mathbb{R} - \{2\}$ em $\mathbb{R} - \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Qual é a função inversa de *f*?

Solução

A função dada é $f(x) = y = \frac{x+1}{x-2}$, com $x \neq 2$ e $y \neq 1$.

Aplicando a regra prática, temos:

$$x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow xy - 2x = y + 1 \Rightarrow xy - y = 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x-1) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}$$

Resposta: É a função f^{-1}, de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R} - \{2\}$, definida por

$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

496. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) f: $\mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 3}$

b) f: $\mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

c) f: $\mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{4 - x}{x - 3}$

d) f: $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

$f(x) = \dfrac{5x + 2}{3x - 1}$

e) f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{4\}$

$f(x) = \dfrac{4x + 2}{x}$

f) f: $\mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 3}$

497. Sendo *f* e *g* funções reais definidas pelas sentenças $f(x) = 3^x - 1$ e $g(x) = \log_4 (x - 1)$, determine $(f \circ g^{-1})(0)$.

498. A função *f* definida em $\mathbb{R} - \{2\}$ por $f(x) = \dfrac{2 + x}{2 - x}$ é inversível. O seu contradomínio é $\mathbb{R} - \{a\}$. Calcule *a*.

499. Seja a função *f* de $\mathbb{R} - \{-2\}$ em $\mathbb{R} - \{4\}$ definida por $f(x) = \dfrac{4x - 3}{x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 5?

Solução

Queremos determinar $a \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $f^{-1}(a) = 5$; para isso, basta determinar *a* tal que $f(5) = a$:

$$a = f(5) = \frac{4 \cdot 5 - 3}{5 + 2} = \frac{17}{7} \Rightarrow a = \frac{17}{7}$$

500. Seja a função *f* de $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$ em $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Qual é o valor do domínio de f^{-1} com imagem 3?

501. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$ e a função *f* de A em B definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Obtenha a função inversa de *f*.

Solução

A função dada é $f(x) = y = x^2 - 2x + 3$, com $x \geqslant 1$ e $y \geqslant 2$.
Aplicando a regra prática, temos:

I) permutando as variáveis:
$x = y^2 - 2y + 3$ com $y \geqslant 1$ e $x \geqslant 2$

II) expressando y em função de x:

$x = y^2 - 2y + 3 \Rightarrow x = y^2 - 2y + 1 + 3 - 1 \Rightarrow x = (y - 1)^2 + 2 \Rightarrow$
$(y - 1)^2 = x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x - 2}$ ou
$y - 1 = -\sqrt{x - 2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{x - 2}$ ou $y = 1 - \sqrt{x - 2}$

Considerando que na função inversa f^{-1} devemos ter $y \geqslant 1$ e $x \geqslant 2$, a sentença que define a função inversa é $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$.

Resposta: $f^{-1}: B \to A$
$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$

502. Obtenha a função inversa das seguintes funções:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 2x$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{1}{4}\right\}$
$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 9\}$
$f: A \to B$
$f(x) = -x^2 + 4x + 5$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$
$f: A \to B$
$f(x) = -x^2 - 2x + 4$

g) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{5}{4}\right\}$ e $B = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{8}\right\}$
$f: A \to B$
$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

503. Seja a função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.
Determine f^{-1}.

Solução

Notemos que:

1º) se $x \geqslant 0$, então $f(x) = y = x^2 - 1$; logo, $y \geqslant -1$.

2º) se $x < 0$, então $f(x) = y = x - 1$; logo, $y < -1$.

A função proposta é:

$y = x^2 - 1$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant -1$, ou $y = x - 1$, com $x < 0$ e $y < -1$.

Aplicando a regra prática:

I) permutando as variáveis, temos:

$x = y^2 - 1$, com $y \geqslant 0$ e $x \geqslant -1$, ou $x = y - 1$, com $y < 0$ e $x < -1$.

II) expressando y em função de x, temos:

$y = \sqrt{x + 1}$, com $y \geqslant 0$ e $x \geqslant -1$, ou $y = x + 1$, com $y < 0$ e $x < -1$.

Logo, a função inversa f^{-1} é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1} \text{ se } x \geqslant -1 \\ x + 1 \text{ se } x < -1 \end{cases}$$

504. Nas seguintes funções em $\mathbb{R}$, determine a função inversa.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ se } x \geqslant 2 \\ 3x + 1 \text{ se } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5 - 3x \text{ se } x \geqslant -1 \\ 4 - 4x \text{ se } x < -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \geqslant 0 \\ 2x \text{ se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 \text{ se } x < -1 \\ 4x + 1 \text{ se } x \geqslant -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3} \text{ se } x \geqslant 3 \\ (3 - x)^3 \text{ se } x < 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7 \text{ se } x \geqslant 2 \\ 2x - 1 \text{ se } -1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 4 \text{ se } x \leqslant -1 \end{cases}$

505. A função f em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$, admite função inversa?

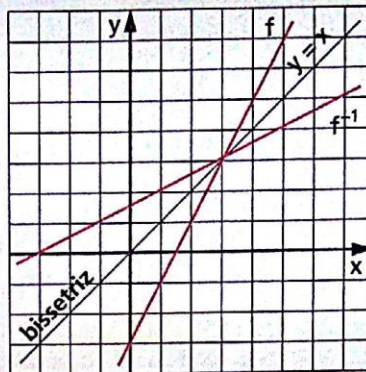
506. Seja a função f em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + |x + 1| - |2x - 4|$. Determine a função inversa de f. Calcule $f^{-1}(42)$.

507. Seja a função f em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1}.

Solução

$f(x) = 2x - 3$ $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

x	y
−1	−5
0	−3
1	−1
2	1
3	3
4	5

x	y
−5	−1
−3	0
−1	1
1	2
3	3
5	4

508. Nas funções que seguem, construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de *f* e f^{-1}.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{2x + 4}{3}$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 1 - x^3$

d) $f: \mathbb{R}_- \to B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

$f(x) = 1 - x^2$

e) $f: A \to A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

$f(x) = x^2 + 2x$

f) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

g) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$f(x) = 2^x$

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

509. Dadas as funções *f* e *g* em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, determine a função inversa de $g \circ f$.

Solução

1º processo

Determinamos inicialmente $g \circ f$ e em seguida $(g \circ f)^{-1}$:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 5 = 2(3x - 2) + 5 = 6x + 1$

Aplicando a regra prática, temos: $x = 6y + 1 \Rightarrow y = \dfrac{x - 1}{6}$;

portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{6}$.

2º processo

Determinamos inicialmente f^{-1} e g^{-1} e em seguida $f^{-1} \circ g^{-1}$, pois $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aplicando a regra prática em $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, temos:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3} \quad \text{e} \quad g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{g^{-1}(x) + 2}{3} = \frac{\frac{x-5}{2} + 2}{3} = \frac{x-1}{6}$$

portanto, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$.

Resposta: $(g \circ f): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$$

510. Dadas as funções *f* e *g*, determine a função inversa de $g \circ f$:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 4x + 1$; $g(x) = 3x - 5$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$; $g(x) = 2x + 3$

c) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g: \mathbb{R}_+ \to C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$
$f(x) = x^2$; $g(x) = 4 - x$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$
$f: A \to B$ e $g: B \to \mathbb{R}_+$
$f(x) = x^2 - 3x$; $g(x) = 4x + 9$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
$f: A \to \mathbb{R}_+$ e $g: \mathbb{R}_+ \to C$
$f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \sqrt{x + 4}$

511. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ e as funções *f* de A em B, definida por $f(x) = x^2 + 4x$, e *g* de B em C, definida por $g(x) = x^2 - 1$. Responda: existe $(g \circ f)^{-1}$? Justifique a resposta.

512. Sejam os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$ e as funções: *f* de A em $\mathbb{R}_-$, definida por $f(x) = 2x - 1$, *g* de $\mathbb{R}_-$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $g(x) = x^2$, e *h* de $\mathbb{R}_+$ em B, definida por $h(x) = 4x - 1$. Determine a função inversa de $h \circ (g \circ f)$.

LEITURA

Bertrand Russell e o Logicismo

Hygino H. Domingues

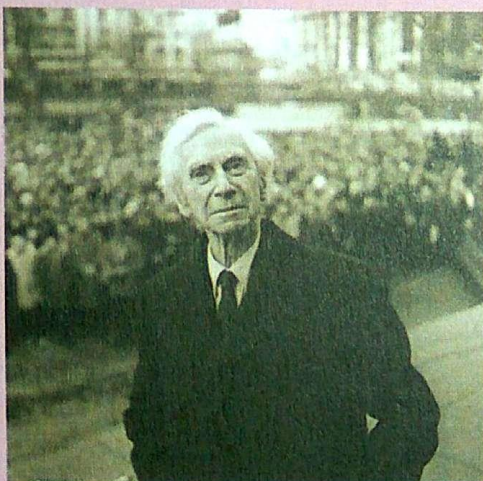
A filosofia iniciou-se com Tales de Mileto (c. 585 a.C.), o primeiro matemático a ter seu nome gravado na história. A filosofia moderna tem como seu marco inicial *O discurso do método* (1636), do grande matemático francês René Descartes. Ainda no século XVII brilhariam simultaneamente na filosofia e na matemática Pascal e Leibniz. Possivelmente ninguém no século passado encarnou melhor essa dualidade científica do que Bertrand Russell (1872-1970).

Russell nasceu em Trelleck, País de Gales, numa família em que a tradição liberal constituía uma vertente destacada. O avô, Lorde John Russell, que chegou a primeiro-ministro no reinado da rainha Vitória, notabilizou-se na política por suas ideias reformistas (por exemplo, em favor da instrução popular). Era tão admirado que em suas viagens pelo interior o povo enfileirava-se à beira das estradas por onde passava para aclamá-lo. Uma frase sua era citada repetidamente: "Quando me perguntam se uma nação está amadurecida para a liberdade, respondo: acaso existe algum homem amadurecido para ser déspota?". A mãe de Bertrand era uma conhecida líder feminista; o pai, Visconde de Amberley, pretendia educá-lo no agnosticismo. Mas ambos morreram antes de ele completar 4 anos de idade. Assim, B. Russell acabou sendo educado por preceptores e governantas, segundo as ideias do ramo conservador da família. Mas não adiantou. Segundo suas próprias palavras: "Quanto à religião, passei a não acreditar primeiro no livre-arbítrio, depois na imortalidade e finalmente em Deus". E em matéria de moral, a vigente em seu tempo lhe parecia demasiado estreita e preconceituosa...

Aos 18 anos de idade B. Russell matriculou-se no Trinity College da Universidade de Cambridge, a fim de estudar matemática e filosofia. Nessa época a fundamentação rigorosa da matemática ainda não chegara a Cambridge, o que um espírito agudo e crítico como ele não deixaria passar em branco. Em *Meu pensamento filosófico* escreveu: "Aqueles que me ensinaram o cálculo infinitesimal não conheciam provas convincentes de seus teoremas fundamentais e tentaram fazer-me aceitar os sofismas oficiais como um ato de fé".

Certamente foi essa preocupação com a fundamentação rigorosa da matemática que o impeliu, desde logo, para o campo da lógica. Esta, desde Boole (1815-1864), vinha se utilizando de métodos matemáticos, como o emprego de um simbolismo e de demonstrações de princípios lógicos a partir de axiomas. Gottlob Frege (1848-1925), o expoente máximo da lógica em seu tempo, defendia a tese de que a matemática é um ramo da lógica, tese à qual Russell aderiu decididamente. Isso mesmo tendo encontrado falhas na obra

de Frege. De fato, em carta de 1902 Russell expunha a Frege uma antinomia que, segundo este, numa demonstração talvez exagerada de honestidade científica, derrubava os fundamentos de suas *Leis fundamentais*, uma obra cujo segundo volume estava para ser lançado. É que essa obra usava o conceito de conjunto de todos os conjuntos que leva a contradições. Era preciso eliminar da teoria dos conjuntos conceitos como esse...

LEBRECHT/MIRRORPIX/DIOMEDIA

Bertrand Russell (1872-1970).

A meta de Russell, de reduzir a matemática à lógica, traduziu-se num programa ou filosofia matemática conhecida como **Logicismo**. Esse programa foi grandemente desenvolvido na obra *Principia Mathematica*, em três volumes, publicados respectivamente em 1910, 1912 e 1913, de autoria de Russell e A. N. Whitehead (1861-1947). Mas essa tentativa, como outras, de impor certos limites à matemática, apesar de produzir frutos muito positivos, ficou aquém da expectativa dos que a empreenderam e mostra vários pontos passíveis de críticas. Nas primeiras linhas de *Meu pensamento filosófico* Russell registrou: "Quanto aos fundamentos da matemática, não cheguei a parte alguma".

A dedicação de Russell à matemática e à filosofia não o impediu de, até o fim de seus dias, engajar-se firmemente nas grandes questões sociais de seu tempo. Assim é que, em 1916, foi destituído de sua cátedra em Cambridge, considerado traidor da pátria e preso, por sua atitude pacifista em face da Primeira Guerra Mundial. Alguns anos antes do fim de sua vida não raro aparecia à frente de passeatas pela proscrição de armas nucleares e contra a Guerra do Vietnã.

Em 1940, quando era professor da Universidade da Califórnia, o Conselho do City College de Nova Iorque aprovou por unanimidade a indicação do nome de Russell para uma cadeira de seu Departamento de Filosofia. Mas houve uma reação tão forte de alguns setores da Igreja que sua nomeação acabou sendo obstada na Justiça. A propósito declarou John Dewey: "Como americanos não nos resta senão enrubescer diante dessa mancha em nossa reputação de agir com lisura". Isso não impediu, contudo, que continuasse a ensinar nos Estados Unidos: a Universidade de Harvard acolheu-o prazerosamente.

Em 1944 voltou à Inglaterra, onde o rei George VI conferiu-lhe a Ordem do Mérito. Em 1950 foi agraciado com o Prêmio Nobel de Literatura. (Talvez não seja demais lembrar que essa láurea não é conferida às áreas de matemática e filosofia.)

Equações irracionais

Equação irracional é uma equação em que há incógnita sob um ou mais radicais.

Exemplos:

$\sqrt{x - 2} = 3$, $\sqrt[3]{2x + 1} = 2$, $\sqrt{3x + 2} = x + 2$, $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 4} = 5$

Para resolvermos uma equação irracional, devemos transformá-la, eliminando os radicais, bastando para tanto elevá-la a potências convenientes. Não devemos esquecer que esse procedimento pode introduzir raízes estranhas à equação proposta inicialmente.

153. Equação $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Façamos o estudo da equação irracional do tipo $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$f(x) = [g(x)]^2$$

As duas equações podem ser escritas assim:

$$\sqrt{f(x)} - g(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) - [g(x)]^2 = 0$$

ou

$$\sqrt{f(x)} - g(x) = 0 \quad \textbf{(1)} \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{f(x)} - g(x)\right) \cdot \left(\sqrt{f(x)} + g(x)\right) = 0 \quad \textbf{(2)}$$

É notório que toda raiz da equação (1) é raiz da equação (2), porque, anulando-se $\sqrt{f(x)} - g(x)$, anular-se-á o produto $\left(\sqrt{f(x)} - g(x)\right) \cdot \left(\sqrt{f(x)} + g(x)\right)$.

Entretanto, a recíproca não é verdadeira, isto é, uma raiz da equação **(2)** pode não ser raiz da equação **(1)**. De fato, uma raiz de **(2)** anula um dos fatores, podendo anular $\sqrt{f(x)} + g(x)$ sem anular $\sqrt{f(x)} - g(x)$.

Para verificar se α, raiz da equação **(2)**, também é raiz da equação **(1)**, podemos proceder de dois modos:

1º) verificando na equação proposta, isto é, substituindo *x* por α em **(1)** e notando se aparece uma igualdade verdadeira;

2º) verificando se $g(\alpha) \geqslant 0$.

Mostremos que $g(\alpha) \geqslant 0 \Rightarrow \alpha$ é raiz de **(1)**:

$$f(\alpha) = (g(\alpha))^2 \Rightarrow [\sqrt{f(\alpha)} - g(\alpha)]\,[\sqrt{f(\alpha)} + g(\alpha)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} \\ \text{ou} \\ g(\alpha) = -\sqrt{f(\alpha)} \end{cases}$$

Como $g(\alpha) \geqslant 0$, resulta que só $g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)}$ é verdadeira, isto é, α é raiz da equação $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

Esquematicamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geqslant 0$$

EXERCÍCIOS

513. Resolva as equações, no conjunto dos números reais:

a) $\sqrt{2x - 3} = 5$

b) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$

Solução

a) Não há possibilidade de introduzir raízes estranhas ao quadrarmos essa equação, pois:

$g(x) = 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2x - 3} = 5 \Rightarrow 2x - 3 = 5^2 \Rightarrow x = 14$

$S = \{14\}$

b) Antes de quadrarmos essa equação, é conveniente isolarmos a raiz em um dos membros. Assim, temos:

$\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$

$x = 0$ não é solução, pois $\sqrt{0^2 + 5 \cdot 0 + 1} + 1 \neq 2 \cdot 0$.

$x = 3$ é solução, pois $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} + 1 = 2 \cdot 3$.

$S = \{3\}$.

Para verificar se $x = 0$ ou $x = 3$ são ou não soluções da equação proposta, podemos utilizar o segundo processo, como segue:

$g(x) = 2x - 1$

$g(0) = -1 < 0 \Rightarrow x = 0$ não é solução

$g(3) = 5 > 0 \Rightarrow x = 3$ é solução

514. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações irracionais:

a) $\sqrt{3x - 2} = 4$

b) $\sqrt{1 - 2x} = 3$

c) $\sqrt{x^2 - 5x + 13} = 3$

d) $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} = 2$

e) $\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 2$

f) $\sqrt{16 + \sqrt{x + 4}} = 5$

g) $\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}} = 3$

h) $\sqrt{5x + 10} = 17 - 4x$

i) $x + \sqrt{25 - x^2} = 7$

j) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

k) $2 - x - 2\sqrt{x + 1} = 0$

l) $\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x$

m) $\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 2 = 3x$

n) $\sqrt{x^4 + 2x^2 - x + 1} = 1 - x^2$

o) $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$

p) $\sqrt{2x - \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$

515. Resolva a equação $\sqrt{4x + 5} - x = 0$, em $\mathbb{R}$.

516. Calcule x, sabendo que ele é dado pela expressão $x = |\sqrt{2 + x}|$.

517. Julgue os seguintes itens:

a) $27 + 9a + a^2 + (3^{-1}a)^3 = \left(\dfrac{9 + a}{3}\right)^3$

b) $2{,}333... = 2 + 0{,}3 + 0{,}03 + ... = 2\dfrac{1}{3}$.

c) A equação $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ possui duas raízes reais.

d) Se a é um número real, então $|a| - |a + 1| < 0$.

e) Se a, b, $\dfrac{5}{12}$, c e d estão em progressão aritmética, então $a + b + c + d = \dfrac{5}{3}$.

f) $|x - 1| (x + 1) (x - 2) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < x < 2$.

g) Se a e b são números reais positivos, então:

$$\frac{b^4 - a^2}{(b - \sqrt{a})} = b^3 + a^{\frac{1}{2}}b + ab + a^{\frac{3}{2}}$$

518. Verifique se existem números reais x tais que $2 - x = \sqrt{x^2 - 12}$. Justifique a resposta.

519. Resolva as equações, no conjunto dos reais:

a) $x^3 - 3\sqrt{x^3} + 2 = 0$

b) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} - 1 = 0$

Solução

a) Fazendo $\sqrt{x^3} = y$ e $x^3 = y^2$, temos:
$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 2$
mas $y = \sqrt{x^3}$; logo:
$\sqrt{x^3} = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$
$\sqrt{x^3} = 2 \Rightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$
$S = \{1, \sqrt[3]{4}\}$

b) Fazendo $\sqrt[4]{x} = y$ e $\sqrt{x} = y^2$, temos:
$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ ou $y = -1$
Agora calculemos x:
$y = -1 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$
$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$
$S = \left\{\frac{1}{16}\right\}$

520. Resolva as equações, em $\mathbb{R}$:

a) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

b) $9x + 12\sqrt{x} - 5 = 0$

c) $6x + 7\sqrt{x} + 2 = 0$

d) $x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$

e) $x^3 - 6\sqrt{x^3} + 5 = 0$

f) $x^3 + 7\sqrt{x^3} - 8 = 0$

g) $\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} + 2 = 0$

h) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 6 = 0$

i) $3\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} - 1 = 0$

j) $9\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt{x^3} - 1 = 0$

521. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 3x = x^2 + 4$$

Solução

A equação proposta é equivalente a:

$x^2 + 3x + 4 - \sqrt{x^2 + 3x + 6} = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 - \sqrt{x^2 + 3x + 6} - 2 = 0$

Fazendo $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = y$, temos:

$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$

$y = -1$ não convém, pois $y = \sqrt{x^2 + 3x + 6} \geqslant 0$.

Para $y = 2$, temos:

$\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + 6 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2$ ou $x = -1$

$S = \{-2, -1\}$

522. Resolva as equações, em $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 + 5x + 4 = 2\sqrt{3x^2 + 5x + 7}$

b) $x^2 + \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 4x + 7$

c) $x^2 - x + 3 = 5\sqrt{x^2 - x - 3}$

d) $x^2 + 4\sqrt{x^2 - 2x - 6} = 2x + 3$

e) $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$

523. Resolva, em $\mathbb{R}_+$, a equação:

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$$

524. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 4} = 5$$

Solução

Antes de elevarmos ao quadrado, devemos transpor uma das raízes para o outro membro. Assim, temos:

$\sqrt{2x + 1} + \sqrt{2x - 4} = 5 \Rightarrow \sqrt{2x + 1} = 5 - \sqrt{2x - 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{2x + 1})^2 = (5 - \sqrt{2x - 4})^2 \Rightarrow 2x + 1 = 25 - 10\sqrt{2x - 4} + 2x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{2x - 4} = 20 \Rightarrow \sqrt{2x - 4} = 2 \Rightarrow 2x - 4 = 2^2 \Rightarrow x = 4$

$x = 4$ é solução, pois:

$\sqrt{2 \cdot 4 + 1} + \sqrt{2 \cdot 4 - 4} = 5$

$S = \{4\}$

525. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$

b) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = 1$

c) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} = 1$

d) $\sqrt{x - 9} - \sqrt{x - 18} = 1$

e) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 14} = 1$

f) $\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 24} = 14$

526. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x + 1}$

b) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$

c) $\sqrt{4x + 1} - \sqrt{x - 2} = 3$

d) $\sqrt{2x + 2} - \sqrt{x - 1} = 2$

e) $\sqrt{x + 1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x + 8}}$

f) $\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1$

g) $\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} = 4$

527. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt{x + 10} - \sqrt{x + 3} = \sqrt{4x - 23}$

b) $\sqrt{x + 4} + 2\sqrt{x + 1} = \sqrt{x + 20}$

c) $\sqrt{x + 5} = \sqrt{4x + 9} - \sqrt{x}$

d) $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{7x + 4}$

e) $\sqrt{4x - 3a} - \sqrt{x + 6a} = \sqrt{x - 3a}$

528. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 10}$$

Solução

$\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x - 2} + \sqrt{x - 7}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 10}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 + x - 7 + 2\sqrt{x^2 - 9x + 14} = x + 5 + x - 10 + 2\sqrt{x^2 - 5x - 50} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 - 9x + 14} = 4 + 2\sqrt{x^2 - 5x - 50} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 9x + 14} = 2 + \sqrt{x^2 - 5x - 50} \Rightarrow$

$\Rightarrow 60 - 4x = 4\sqrt{x^2 - 5x - 50} \Rightarrow 15 - x = \sqrt{x^2 - 5x - 50} \Rightarrow$

$\Rightarrow 225 - 30x + x^2 = x^2 - 5x - 50 \Rightarrow -25x = -275 \Rightarrow x = 11$

$x = 11$ é solução, pois

$\sqrt{11 - 2} + \sqrt{11 - 7} = \sqrt{11 + 5} + \sqrt{11 - 10}$

$S = \{11\}$

529. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 2} - \sqrt{2x + 5} = \sqrt{3x}$

b) $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 10} = \sqrt{x + 17} + \sqrt{x - 15}$

c) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{x + 34} - \sqrt{x + 7}$

d) $\sqrt{8x + 1} - \sqrt{2x - 2} = \sqrt{7x + 4} - \sqrt{3x - 5}$

530. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $x + \sqrt{x^2 + 16} = \dfrac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 2} = \dfrac{4}{\sqrt{x + 2}}$

c) $\sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x} = \dfrac{12}{\sqrt{5 + x}}$

d) $\dfrac{\sqrt{4x + 20}}{4 + \sqrt{x}} = \dfrac{4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

e) $\sqrt{x - 1 + \sqrt{2x - 2}} = 2$

531. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\frac{2}{x + \sqrt{2 - x^2}} + \frac{2}{x - \sqrt{2 - x^2}} = x$$

Solução

Multiplicando os termos da primeira fração por $x - \sqrt{2 - x^2}$ e os da segunda por $x + \sqrt{2 - x^2}$, temos:

$$\frac{2(x - \sqrt{2 - x^2})}{2x^2 - 2} + \frac{2(x + \sqrt{2 - x^2})}{2x^2 - 2} = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - \sqrt{2 - x^2}}{x^2 - 1} + \frac{x + \sqrt{2 - x^2}}{x^2 - 1} = x \Rightarrow 2x = x(x^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

$x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ não são soluções, pois devemos ter $2 - x^2 \geqslant 0$ para que seja real a expressão $\sqrt{2 - x^2}$. Somente $x = 0$ é solução e isso pode ser verificado facilmente, substituindo *x* por zero na equação proposta.

$S = \{0\}$

532. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}} = \sqrt{2(x^2 + 1)}$

b) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} - \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$

c) $\dfrac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \dfrac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}$

533. Resolva as equações abaixo, em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=2$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

c) $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$

534. Sendo *a* e *b* números reais, resolva a equação:

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$$

535. Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, resolva a equação:

$$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

536. Sendo *a* e *b* números reais não negativos, resolva e discuta a equação:

$$\sqrt{x+a}=\sqrt{x}+\sqrt{b}$$

537. Sabendo que *a* e *b* são números reais e positivos, resolva as equações:

a) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$

b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{b}{a}$

538. Sendo *a* e *b* números reais não nulos, resolva a equação:

$$\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=x-a$$

539. Trabalhando no conjunto dos números reais, resolva a equação $\sqrt{x-1}=a-x$, determinando ao mesmo tempo os valores de *a* para que a equação tenha efetivamente solução. Encontre a fórmula que dá a solução em termos do parâmetro *a* e explique por que essa fórmula (e não outra) é a solução. Faça os gráficos das funções $y=\sqrt{x-1}$ e $y=a-x$ e interprete a solução da equação dada em termos desses gráficos.

540. Resolva os sistemas de equações, em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} xy=36 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy} \\ x+y=20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2} \\ x+y=10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ x^2+y^2+xy=133 \end{cases}$

541. Resolva os sistemas de equações, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 5\sqrt{x^2 - 3y - 1} + \sqrt{x + 6y} = 19 \\ 3\sqrt{x^2 - 3y - 1} = 1 + 2\sqrt{x + 6y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + 4y} = 4 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x + 2y} - \sqrt{2x + 2y} = 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$

154. Equação $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$

Façamos agora o estudo da equação do tipo $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$.

Vamos mostrar que ao elevarmos essa equação ao cubo não introduzimos raízes estranhas, isto é, obtemos uma equação equivalente.

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^3$$

De fato, considerando essas duas equações, temos:

$$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \quad \text{e} \quad f(x) = [g(x)]^3$$

ou

$$\sqrt[3]{f(x)} - g(x) = 0 \qquad \textbf{(1)} \quad \text{e} \quad f(x) - [g(x)]^3 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Observemos em **(2)** que:

$$f(x) - [g(x)]^3 = \left[\sqrt[3]{f(x)} - g(x)\right] \cdot \left[\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2 + g(x) \cdot \sqrt[3]{f(x)} + \left(g(x)\right)^2\right] = 0$$

Como o fator $\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2 + g(x) \cdot \sqrt[3]{f(x)} + \left(g(x)\right)^2$ é sempre positivo, pois

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2 + g(x) \cdot \sqrt[3]{f(x)} + \left(g(x)\right)^2 = \left[\sqrt[3]{f(x)} + \frac{g(x)}{2}\right]^2 + \frac{3 \cdot [g(x)]^2}{4}$$

resulta que o fator $\sqrt[3]{f(x)} - g(x)$ é nulo e a equação **(2)** tem sempre as mesmas soluções da equação **(1)**, isto é, **(1)** e **(2)** são equivalentes.

EXERCÍCIOS

542. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt[3]{2x + 1} = 3$

b) $\sqrt[3]{4x^2 + 9x + 1} = x + 1$

Solução

a) $\sqrt[3]{2x + 3} = 3 \Rightarrow 2x + 1 = 3^3 \Rightarrow x = 13$

$S = \{13\}$

b) $\sqrt[3]{4x^2 + 9x + 1} = x + 1 \Rightarrow 4x^2 + 9x + 1 = (x + 1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 9x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -2$

$S = \{0, 3, -2\}$

543. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt[3]{3x - 5} = 1$

b) $\sqrt[3]{4x + 1} = 2$

c) $\sqrt[3]{2x + 5} = -3$

d) $\sqrt[3]{x^2 - x - 4} = 2$

e) $\sqrt[3]{3x^2 - 7x - 5} = 1$

f) $\sqrt[3]{x^2 - 8x + 40} = 3$

g) $\sqrt[3]{x + 1} = 2x + 1$

h) $\sqrt[3]{3x - 1} = 2x - 1$

i) $\sqrt[3]{2x^2 + 3x - 1} = 2x - 1$

j) $\sqrt[3]{8 + 15x - 5x^2 - 3x^3} = x + 2$

544. Resolva a equação $2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2 - 20} = 0$ no conjunto dos reais.

545. Resolva a equação $\sqrt[3]{x + 49} - \sqrt[3]{x - 49} = 2$, para x real.

Solução

$\sqrt[3]{x + 49} - \sqrt[3]{x - 49} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x + 49} = 2 + \sqrt[3]{x - 49} \Rightarrow (\sqrt[3]{x + 49})^3 =$

$= (2 + \sqrt[3]{x - 49})^3 \Rightarrow x + 49 = 8 + 12\sqrt[3]{x - 49} + 6(\sqrt[3]{x - 49})^2 + x - 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(\sqrt[3]{x - 49})^2 + 12\sqrt[3]{x - 49} - 90 = 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{x - 49})^2 + 2\sqrt[3]{x - 49} - 15 = 0$

Fazendo $\sqrt[3]{x - 49} = y$, temos:

$y^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -5$, mas $y = \sqrt[3]{x - 49}$; então:

$\sqrt[3]{x - 49} = 3 \Rightarrow x - 49 = 3^3 \Rightarrow x = 76$

$\sqrt[3]{x - 49} = -5 \Rightarrow x - 49 = (-5)^3 \Rightarrow x = -76$

$S = \{76, -76\}$

546. Resolva a equação $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 6} = 1$, em $\mathbb{R}$.

547. Se o número *x* é solução da equação $\sqrt[3]{x + 9} - \sqrt[3]{x - 9} = 3$, determine o valor de x^2.

548. Resolva a equação $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{2x - 3}$, em $\mathbb{R}$.

549. Resolva a equação $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$, para *x* real.

550. Resolva a equação $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{5x}$, no conjunto $\mathbb{R}$.

Solução

Para resolvermos essa equação vamos utilizar a identidade

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

Fazendo $A = \sqrt[3]{x + 1}$, $B = \sqrt[3]{x - 1}$ e $A + B = \sqrt[3]{5x}$, temos:

$$(\sqrt[3]{5x})^3 = (\sqrt[3]{x + 1})^3 + (\sqrt[3]{x - 1})^3 + 3\sqrt[3]{x + 1} \cdot \sqrt[3]{x - 1} \cdot \sqrt[3]{5x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{5x^3 - 5x} = 5x \Rightarrow \sqrt[3]{5x^3 - 5x} = x \Rightarrow 5x^3 - 5x = x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^3 - 5x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left\{0, \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

551. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{11x}$

b) $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

c) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{5}$

552. Resolva, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

APÊNDICE II

Inequações irracionais

155. **Inequação irracional** é uma inequação em que há incógnita sob um ou mais radicais.

Exemplos:

$\sqrt{x + 2} > 3$, $\sqrt{x^2 - 3x + 4} > x$ e $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3} > 2$

Observemos inicialmente que, se *a* e *b* são números reais não negativos, então:

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

Assim, por exemplo, são verdadeiras as implicações

$$2 < 5 \Rightarrow 4 < 25$$

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} \Rightarrow 3 > 2$$

$$4 < 9 \Rightarrow 2 < 3$$

mas são falsas as implicações

$$-3 < -2 \Rightarrow 9 < 4$$

$$2 > -5 \Rightarrow 4 > 25$$

$$2 > -3 \Rightarrow 4 > 9$$

156. Teorema

Se $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) \geqslant 0$ em um conjunto de valores x pertencentes a $A \subset \mathbb{R}$, então são equivalentes as inequações $f(x) > g(x)$ e $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

Demonstração:

Seja S_1 o conjunto das soluções da inequação $f(x) > g(x)$ e S_2 o conjunto das soluções da inequação $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$, isto é,

$$S_1 = \{x \in A \mid f(x) > g(x)\}$$

e

$$S_2 = \{x \in A \mid [f(x)]^2 > [g(x)]^2\}$$

Para provarmos que as inequações $f(x) > g(x)$ e $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$ são equivalentes, basta provarmos que $S_1 = S_2$.

De fato, para todo α de S_1, temos:

$$\alpha \in S_1 \subset A \Rightarrow f(\alpha) > g(\alpha) > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\alpha) - g(\alpha) > 0 \\ \text{e} \\ f(\alpha) + g(\alpha) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(\alpha) - g(\alpha)] \cdot [f(\alpha) + g(\alpha)] > 0 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 - [g(\alpha)]^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(\alpha)]^2 > [g(\alpha)]^2 \Rightarrow \alpha \in S_2$$

Acabamos de provar que $S_1 \subset S_2$; provemos agora que $S_2 \subset S_1$.

Para todo $\alpha \in S_2$, temos:

$$\alpha \in S_2 \subset A \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \in S_2 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 > [g(\alpha)]^2 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 - [g(\alpha)]^2 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [f(\alpha) + g(\alpha)] \cdot [f(\alpha) - g(\alpha)] > 0 \\ \text{e} \\ \alpha \in A \Rightarrow f(\alpha) \geqslant 0 \text{ e } g(\alpha) \geqslant 0 \Rightarrow f(\alpha) + g(\alpha) \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha) - g(\alpha) > 0 \Rightarrow f(\alpha) > g(\alpha) \Rightarrow \alpha \in S_1$$

Vejamos agora processos para resolver alguns tipos de inequação irracional.

157. Inequação irracional $\sqrt{f(x)} < g(x)$

O processo para resolvermos essa inequação é:

1º) Estabelecemos o domínio de validade, isto é,

$$f(x) \geqslant 0 \text{ e } g(x) > 0 \quad \textbf{(1)}$$

2º) Quadramos a inequação proposta e resolvemos

$$f(x) < [g(x)]^2 \quad \textbf{(2)}$$

As condições **(1)** e **(2)** podem ser agrupadas da seguinte forma:

$$0 \leqslant f(x) < [g(x)]^2 \text{ e } g(x) > 0$$

Esquematicamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) < [g(x)]^2 \text{ e } g(x) > 0$$

Analogicamente, podemos estabelecer para a inequação $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$:

$$\sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geqslant 0$$

EXERCÍCIOS

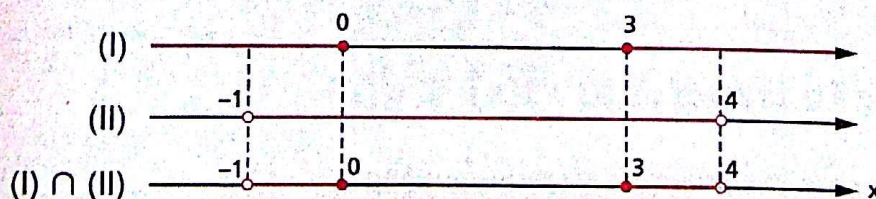
553. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações irracionais:

a) $\sqrt{x^2 - 3x} < 2$

b) $\sqrt{2x + 5} \leqslant x + 1$

Solução

a) $\sqrt{x^2 - 3x} < 2 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 - 3x < 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 3x < 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3 & \text{(I)} \\ \text{e} \\ -1 < x < 4 & \text{(II)} \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0 \text{ ou } 3 \leqslant x < 4\}$

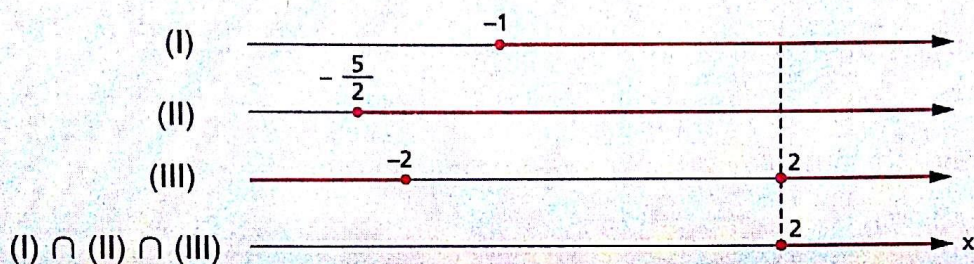
b) $\sqrt{2x + 5} \leqslant x + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 0 \leqslant 2x + 5 \leqslant (x + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x + 5 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x + 5 \leqslant (x + 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 2x + 5 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 & \text{(I)} \\ \text{e} \\ x \geqslant -\dfrac{5}{2} & \text{(II)} \\ \text{e} \\ x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

(I) -1

(II) $-\frac{5}{2}$

(III) -2 2

(I) ∩ (II) ∩ (III) 2 x

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

554. Resolva as inequações, no conjunto dos números reais:

a) $\sqrt{3x - 2} < 2$

b) $\sqrt{2x + 5} \leqslant 3$

c) $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2$

d) $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} \leqslant 2$

e) $\sqrt{2x^2 + x + 3} < 1$

555. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\sqrt{4 - 3x} \leqslant x$

b) $\sqrt{x + 5} < x - 1$

c) $\sqrt{2x + 9} < x - 3$

d) $\sqrt{x + 3} \leqslant x + 1$

e) $\sqrt{x + 1} < 3 - x$

f) $\sqrt{2x^2 - x - 6} \leqslant x$

g) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} < 2x - 1$

h) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} < x + 3$

i) $1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \leqslant 2x$

556. Resolva, em $\mathbb{R}$, a desigualdade:

$$1 - 3x > \sqrt{2 + x^2 - 3x}$$

158. Inequação irracional $\sqrt{f(x)} > g(x)$

O processo para resolução dessa inequação consiste em duas partes, que são:

1ª parte

$$g(x) < 0 \text{ e } f(x) \geqslant 0$$

pois, sendo $g(x) < 0$ e $f(x) \geqslant 0$, a inequação $\sqrt{f(x)} > g(x)$ está satisfeita.

2ª parte

a) Estabelecemos o domínio de validade da inequação, isto é:

$$f(x) \geqslant 0 \text{ e } g(x) \geqslant 0 \quad \textbf{(1)}$$

b) Quadramos a inequação proposta recaindo em:

$$f(x) > [g(x)]^2 \quad \textbf{(2)}$$

As condições **(1)** e **(2)** podem ser agrupadas da seguinte forma:

$$f(x) > [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geqslant 0$$

Esquematicamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \text{ e } g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) > [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Analogamente, para a inequação $\sqrt{f(x)} \geqslant g(x)$, temos:

$$\sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \text{ e } g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ f(x) \geqslant [g(x)]^2 \text{ e } g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

557. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\sqrt{3x - 5} \geqslant 2$ b) $\sqrt{3x^2 - 7x + 2} > -4$ c) $\sqrt{2x - 1} > x - 2$

Solução

a) $\sqrt{3x-5} \geqslant 2 \Rightarrow 3x - 5 \geqslant 2^2 \Rightarrow x \geqslant 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

b) $\sqrt{3x^2 - 7x + 2} > -4 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{3}$ ou $x > 2$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$

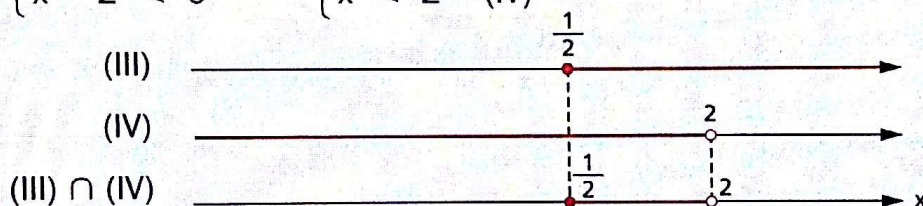
c) $\sqrt{2x-1} > x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \text{ e } x - 2 < 0 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ 2x - 1 > (x-2)^2 \text{ e } x - 2 \geqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I), temos:

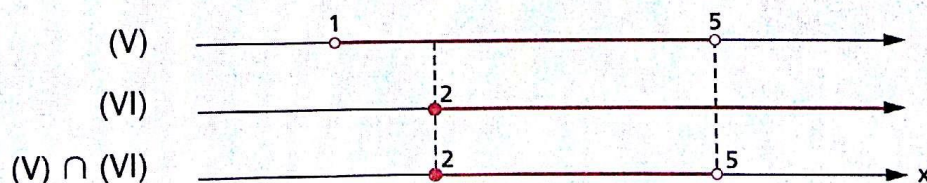
$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{2} & \text{(III)} \\ \text{e} \\ x < 2 & \text{(IV)} \end{cases}$$

(III) — $\frac{1}{2}$

(IV) — 2

(III) ∩ (IV) — $\frac{1}{2}$ — 2 — x

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{2} \leqslant x < 2\right\}$

Resolvendo (II), temos:

$$\begin{cases} 2x - 1 < (x-2)^2 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 < 0 \\ \text{e} \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 5 & \text{(V)} \\ \text{e} \\ x \geqslant 2 & \text{(VI)} \end{cases}$$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 5\}$

A solução da inequação proposta é dada por:

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{2} \leqslant x < 5\right\}$

558. Resolva as inequações, no conjunto dos números reais:

a) $\sqrt{2x + 3} > 5$

b) $\sqrt{3x + 7} \geqslant 1$

c) $\sqrt{4x - 3} > -2$

d) $\sqrt{4x^2 - 13x + 7} > 2$

e) $\sqrt{x^2 - 2x + 7} \geqslant 3$

f) $\sqrt{4 - 19x - 5x^2} \geqslant -3$

g) $\sqrt{5 + 5x - 2x^2} \geqslant 3$

559. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{3x - 2} > x$

b) $\sqrt{6 - x} \geqslant x$

c) $\sqrt{2x + 3} \geqslant 1 - x$

d) $\sqrt{6x^2 + x - 1} > 2x + 1$

e) $\sqrt{x^2 - 6x + 5} > x - 2$

f) $\sqrt{x^2 + 4x - 4} \geqslant 2x - 2$

g) $\sqrt{7x - 1} \geqslant x + 2$

h) $\sqrt{4x^2 - 5x + 2} \geqslant x - 2$

i) $\sqrt{2 + x - x^2} > x - 4$

j) $\sqrt{2 + 3x - 2x^2} > x - 2$

560. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{\sqrt{3 - x}}{x} \leqslant 2$$

Solução

Para resolvermos essa inequação, devemos multiplicar ambos os membros por x, não esquecendo que, dependendo do sinal de x, o sentido da desigualdade será mantido ou invertido.

1ª possibilidade: $x > 0$ (I)

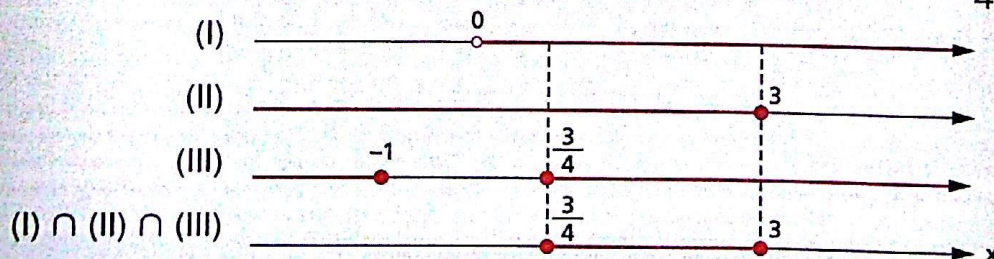
$$\frac{\sqrt{3 - x}}{x} \leqslant 2 \Rightarrow \sqrt{3 - x} \leqslant 2x \Rightarrow 0 \leqslant 3 - x \leqslant 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 3 - x \leqslant 4x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ \text{e} \\ 4x^2 + x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 \quad \text{(II)} \\ \text{e} \\ x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant \dfrac{3}{4} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

(I) — 0

(II) — 3

(III) — -1, $\frac{3}{4}$

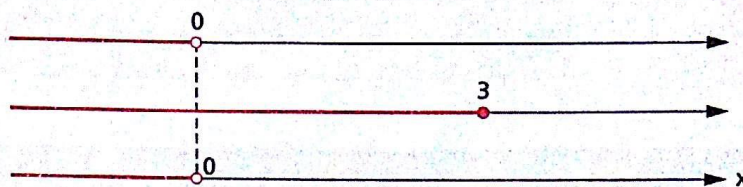
(I) ∩ (II) ∩ (III) — $\frac{3}{4}$, 3, x

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3\right\}$$

2ª possibilidade: $x < 0$ (IV)

$$\frac{\sqrt{3-x}}{x} \leqslant 2 \Rightarrow \sqrt{3-x} \geqslant 2x \xrightarrow{(2x<0)} 3 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3 \quad \text{(V)}$$

(IV) — 0

(V) — 3

(IV) ∩ (V) — 0 — x

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

A solução da inequação proposta é dada por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 3\right\}$$

561. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{\sqrt{5x+3}}{x} < \sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$

c) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x} \geqslant 1$

d) $\dfrac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{x} \geqslant 1$

159. Inequação irracional $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

O processo de resolução dessa inequação é:

1º) Estabelecemos o domínio de validade da inequação, isto é,

$$f(x) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad g(x) \geqslant 0 \quad \mathbf{(1)}$$

2º) Quadramos a inequação proposta recaindo em

$$f(x) > g(x) \quad \mathbf{(2)}$$

As condições **(1)** e **(2)** podem ser agrupadas da seguinte forma:

$$f(x) > g(x) \geqslant 0$$

Esquematicamente, temos:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x) \geqslant 0$$

De modo análogo, para a inequação

$$\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)}, \text{ temos:}$$

$$\sqrt{f(x)} \geqslant \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$$

EXERCÍCIOS

562. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

Solução

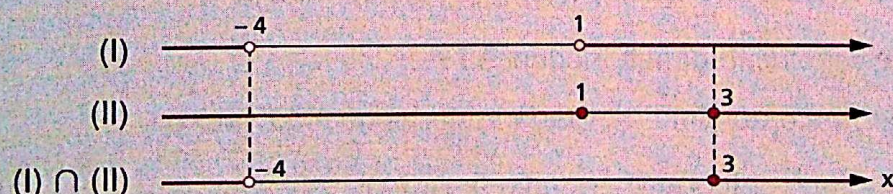
$$\sqrt{2x^2 - x - 1} > \sqrt{x^2 - 4x + 3} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 > x^2 - 4x + 3 \\ \text{e} \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ \text{e} \\ x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ ou } x > 1 \quad \text{(I)} \\ \text{e} \\ x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

(I) −4 1

(II) 1 3

(I) ∩ (II) −4 3 x

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geqslant 3\}$$

563. Resolva as inequações, em $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{3x - 2} \geqslant \sqrt{2x - 3}$

b) $\sqrt{5 - x} < \sqrt{2x + 7}$

c) $\sqrt{2x^2 - 5x - 3} \leqslant \sqrt{8x + 1}$

d) $\sqrt{x^2 - 7x + 17} \geqslant \sqrt{8 + 2x - x^2}$

e) $\sqrt{2x^2 - 10x + 8} > \sqrt{x^2 - 6x + 7}$

f) $\sqrt{-x^2 + 5x - 6} < \sqrt{4x^2 + 12x + 11}$

g) $\sqrt{2 - 3x - x^2} > \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 2} < \sqrt{2x^2 - x + 4}$

564. Resolva, no conjunto dos reais, as inequações:

a) $\sqrt{4 - \sqrt{1 - x}} > \sqrt{2 - x}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{3 + x}} - \sqrt{4 + x} < 0$

c) $\sqrt{1 - x} \leqslant \sqrt{\sqrt{5 + x}}$

d) $\sqrt[4]{x + 8} < \sqrt{x + 2}$

565. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\sqrt{x + 1} < 2 + \sqrt{x - 4}$$

Solução

Estabelecemos inicialmente o domínio de validade da inequação

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 4 \quad \text{(I)}$$

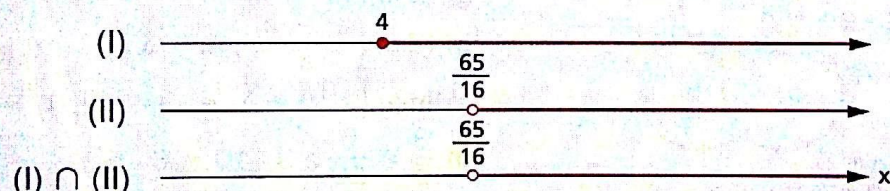
Notemos que, para os valores de x satisfazendo (I), ambos os membros da inequação proposta são positivos, então podemos quadrá-la sem preocupações.

$$\sqrt{x + 1} < 2 + \sqrt{x - 4} \Rightarrow x + 1 < 4 + x - 4 + 4\sqrt{x - 4} \Rightarrow 1 < 4\sqrt{x - 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - 4} > \frac{1}{4} \Rightarrow x - 4 > \frac{1}{16} \Rightarrow x > \frac{65}{16} \quad \text{(II)}$$

(I) — 4 (fechado) ——→

(II) — $\frac{65}{16}$ (aberto) ——→

(I) ∩ (II) — $\frac{65}{16}$ (aberto) ——→ x

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{65}{16}\right\}$$

566. Resolva as inequações, para x real:

a) $\sqrt{x + 5} < 1 + \sqrt{x - 2}$

b) $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 4} < 3$

c) $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$

d) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$

567. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} > \sqrt{2x - 5}$$

568. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} > \sqrt{x + 2\sqrt{x^2 - 10x + 9}}$$

Respostas dos exercícios

Capítulo I

1. São proposições: a, b, c, d, e, f, g.
São verdadeiras: a, c, d, e, g.

2. a) $3 \cdot 7 \neq 21$ (F)
b) $3(11 - 7) = 5$ (F)
c) $3 \cdot 2 + 1 \leqslant 4$ (F)
d) $5 \cdot 7 - 2 > 5 \cdot 6$ (V)
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3$ (F)
f) $\sqrt{2} \geqslant 1$ (V)
g) $-(-4) < 7$ (V)
h) $3 \nmid 7$ (V)

3. a) V
b) V
c) V
d) F
e) V
f) F
g) F

4. a) V
b) V
c) V
d) V
e) F
f) F
g) V

5. a) F
b) V
c) V
d) V
e) F
f) V
g) V
h) V

6. *p* (V); *q* (V); *r* (F); s (F)

8. a) $(\exists\, x)\ (x^2 - 5x + 4 = 0)$
b) $(\forall\, a)\ [(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1]$
c) $(\exists\, y)\left(\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7}\right)$
d) $(\forall\, m)\ \left(\sqrt{m^2} + 9 \neq m + 3\right)$
e) $(\forall\, x)\ (-(-x) = x)$
f) $(\exists\, a)\ (5a + 4 \leqslant 11)$
g) $(\exists\, x)\ \left(\sqrt{x^2} = x\right)$
h) $(\exists\, a)\left(\frac{a^2 - a}{a} = a - 1\right)$

9. a) mdc $(2, 3) \neq 1$ e mmc $(2, 3) = 6$
b) $\frac{3}{5} \neq \frac{6}{10}$ e $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$
c) $\frac{3}{7} < 1$ ou $-3 < -7$
d) $2^2 = 4$ e $\sqrt{4} \neq 2$
e) $(-3)^2 = 9$ e $\sqrt{9} = -3$
f) $2 > 5$ e $3^2 > 5^2$
g) $(\exists\, x)\ (x > 2$ e $3^x \leqslant 3^2)$
h) $(\forall\, x)\ (\sqrt{x} \geqslant 0)$
i) Existe um número inteiro primo e par.
j) Existe um triângulo isósceles e não equilátero.
k) Todo losango é quadrado.
l) Todo número tem raiz quadrada diferente de zero.
m) Existe um triângulo equiângulo e não equilátero.

10. a) F d) F g) F j) V m) F
b) F e) F h) V k) F
c) V f) F i) V l) F

Capítulo II

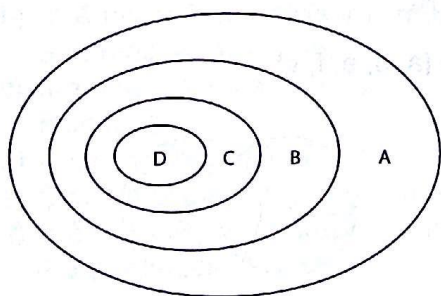
13. a) $\{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$
b) $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm7, \pm14, \pm21, \pm42\}$
c) $\{0\}$
d) $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}\right\}$
e) {Cuiabá, Campo Grande, Goiânia}

14. A = {x | x é divisor de 6}
B = {x | x é múltiplo inteiro e negativo de 10}
C = {x | x é quadrado de um inteiro}
D = {x | x é satélite natural da Terra}

15. D = {3}
16. B = ∅

19. todas

20. a) V c) F e) F g) V i) V
b) F d) F f) V h) V j) F

21.

22. 𝒫(A) = {∅, {a}, {b}, {c}, {d}, {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}, {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d}, {b, c, d}, A}

23. $A \cup B = \{a, b, c, d\}$, $A \cup C = \{a, b, c, e\}$, $B \cup C = \{c, d, e\}$, $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$

25. a) V b) F c) F d) V e) V f) V

26. círculo de centro 0 e raio 2r

27. plano α

28. $A \cap B = \{b, c, d\}$, $A \cap C = \{c\}$, $B \cap C = \{c, e\}$, $A \cap B \cap C = \{c\}$

30. a) V b) F c) F d) V e) V f) V

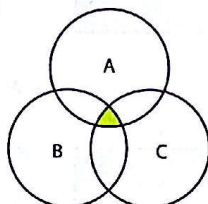
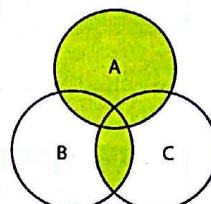
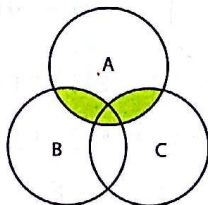
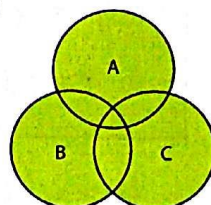
31. a) L b) R c) Q d) Q e) Q f) P

33. X = {a, c, e}

34. C = {2, 5, 6, 7, 9, 10}

35. 4: {1, 2}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 3, 4}

36.

a)

c)

b)

d)

37. 2

38. a) {a, b} d) {a, b}
b) {e, f, g} e) {a, b, c}
c) {b} f) {a, c, e, f, g}

40. a) V b) V c) F d) V

41. X = {1 ,3, 5}

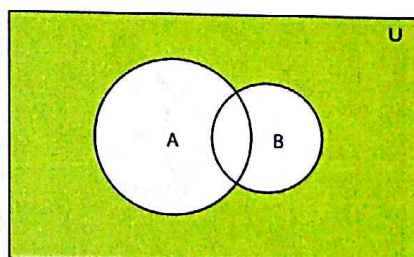
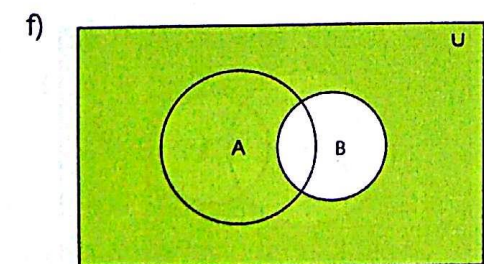
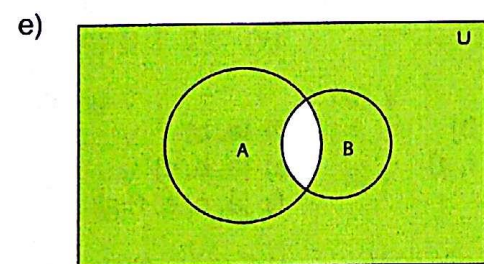
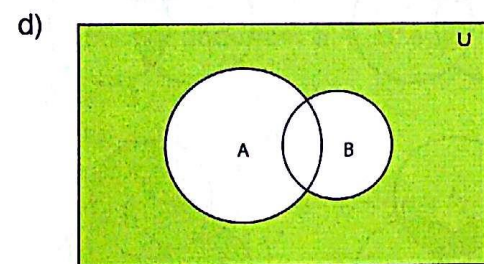
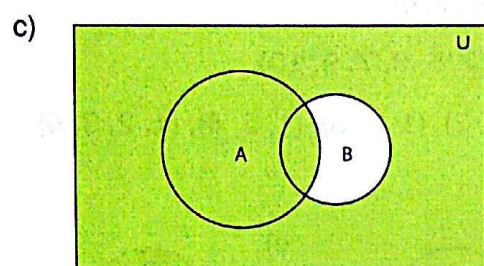
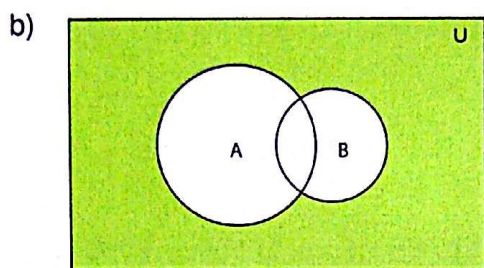
42. a)

b)

c)

d)

e)

f)

44. a) V b) V c) F d) V

45. $\overline{F} = \{6, 7, 8\}$

46. $A = \{6, -1\}$ $D = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$B = \{e, x, r, c, i, o\}$ $E = \{2, 3, 4, 5\}$
$C = \{3, -3, 5\}$

47. a, b, d, f

49. 64

50. $n_{A \cup B \cup C} = n_A + n_B + n_C - n_{A \cap B} - n_{B \cap C} - n_{C \cap A} + n_{A \cap B \cap C}$

51. $n(A \cap B) = 8$

52. 332 e 83

53. $P' \cup Q$

54. a) 8 b) 1 c) 7 d) 3 e) 12

55. $n(A) = 4$; $n(B) = 4$

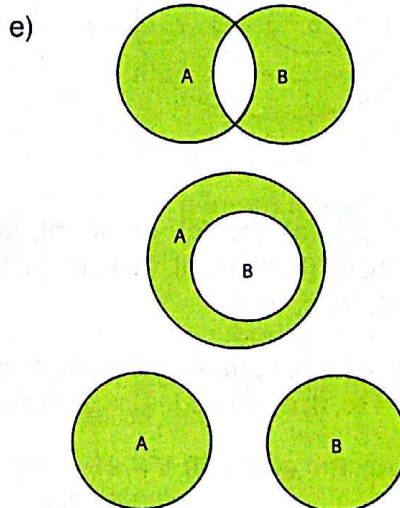
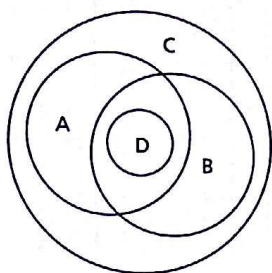
56. a) 500 b) 61 c) 257 d) 84

57. $A = \{p, q, r, s, t\}$
$B = \{r, s, x, z\}$
$C = \{s, t, u, v, x\}$

58. a) 560 b) 280

59. 40%

60. a) $\{a, b, e, f, g\}$

e)

61.

Capítulo III

62. n(H) = 14

63. n(X) = 22

64. B = $\mathbb{N}^*$

65. a, c, d, g, h, i

66. D(6) = {±1, ±2, ±3, ±6}
D(−18) = {±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18}
D(−24) ∩ D(16) = {±1, ±2, ±4, ±8}
M(4) = {0, ±4, ±8, ±12, ...}
M(10) = {0, ±10, ±20, ±30, ...}
M(−9) ∩ M(6) = {0, ±18, ±36, ±54, ...}

67. 12, 0, −1, −4 e 49

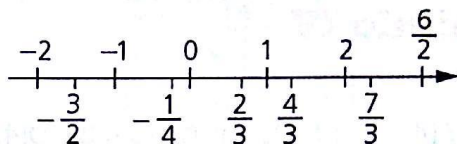
68. a) Não, pois 1 ∈ D(a) ∩ D(b).
b) *m* é um máximo divisor comum de *a* e *b*: mdc (a, b) = ±m.
c) *a* e *b* são primos entre si: mdc (a, b) = ±1.
d) Quando *a* é múltiplo de *b*.
e) Quando *a* e *b* são primos entre si.
f) *n* é um mínimo múltiplo comum de *a* e *b*: mmc(a, b) = ±n.

69. a) ±1 b) ±2 c) ±2 d) ±6 e) ±12 f) ±42

70. a, b, c, d, e, f, h, k, l

71. $\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{8}{25}, \frac{32}{99}, \frac{271}{5}$ e $\frac{602}{111}$

72. $\frac{2}{3} < \frac{11}{12} < \frac{15}{16} < \frac{18}{19} < \frac{47}{48} < 1$

74. −2, −1, 0, 1, 2, $\frac{6}{2}$; $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{3}$

75. a) 1 b) 2

76. 0,025

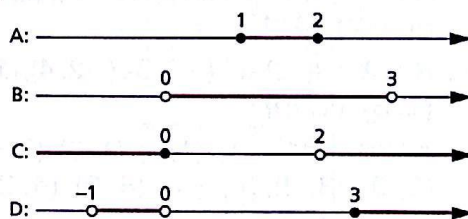
77. α é racional, $\alpha = 1{,}4111... = \frac{127}{90}$

78. 17 142,86 dólares

79. 20%

80. a, b, c, f, g, h, i

88. 1

89.

90. $[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$
$[0, 2[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
$]-3, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$
$]-\infty, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
$[1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

92. a) [1, 2] b)]1, 2] c) $\left]0, \frac{2}{5}\right[$ d) [0, 2] e) [−1, 2[f) [1, 2]

93. a) [−1, 4] b)]−2, 5[c) [−1, 5] d) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$

94. $\complement_A^B = [0, 1] \cup [3, 5[$

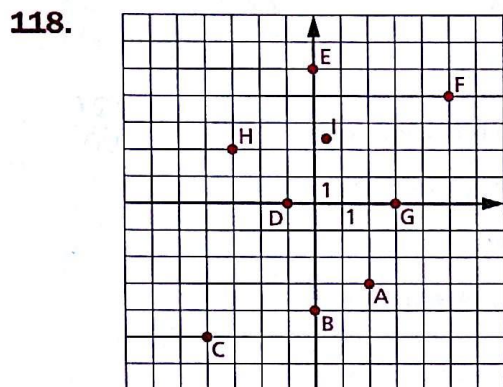
95. $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 5\}$

96. [0, 2]

97. $\mathbb{Z}$

Capítulo IV

117. A(4, 2), B(−4, 6), C(−5,−3), D(4,−5), E(0, 4), F(−3, 0), G(0,−6), H(5, 0), I(0, 0)

118.

119. a) $A \times B = \{(1,-2), (1, 1), (3,-2), (3, 1), (4, -2), (4, 1)\}$

b) $B \times A = \{(-2, 1), (-2, 3), (-2, 4), (1, 1), (1, 3), (1, 4)\}$

c) $A \times C = \{(1, -1), (1, 0), (1, 2), (3, -1), (3, 0), (3, 2), (4, -1), (4, 0), (4, 2)\}$

d) $C \times A = \{(-1, 1), (-1, 3), (-1, 4), (0, 1), (0, 3), (0, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$

e) $B^2 = \{(-2,-2), (-2, 1), (1,-2), (1, 1)\}$

f) $C^2 = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (0,-1), (0, 0), (0, 2), (2,-1), (2, 0), (2, 2)\}$

a)

b)

c)

d)

e)

f)

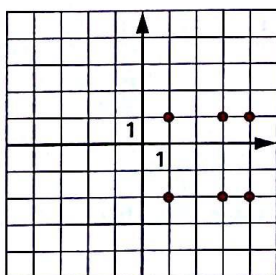
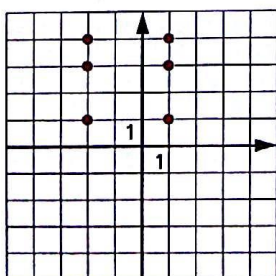
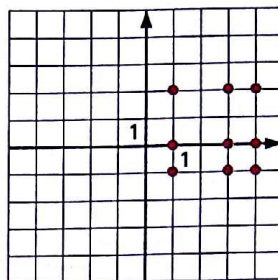
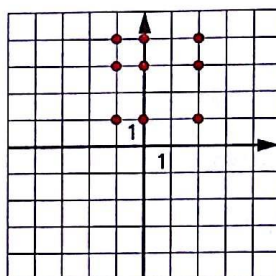
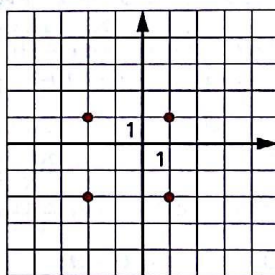
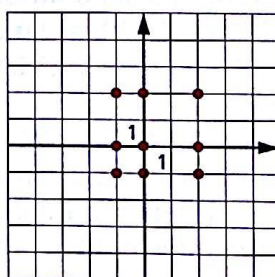
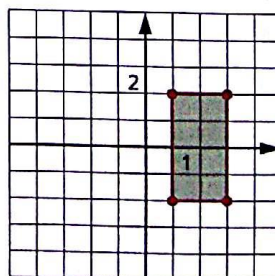
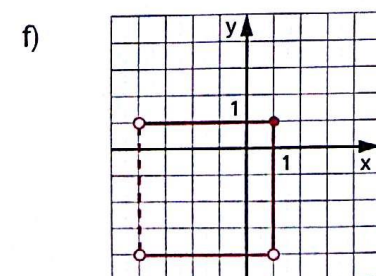
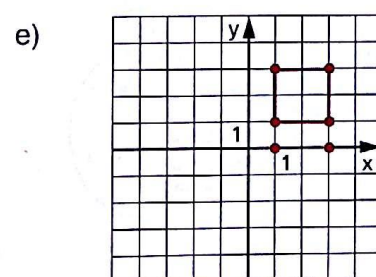
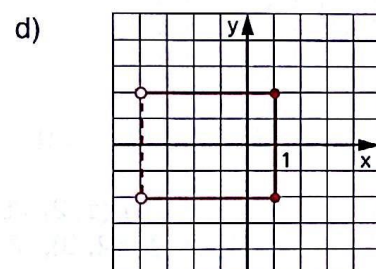
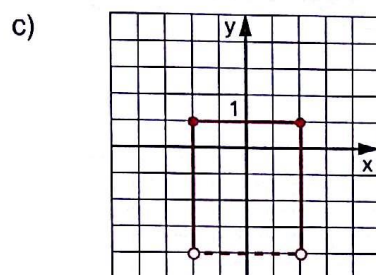
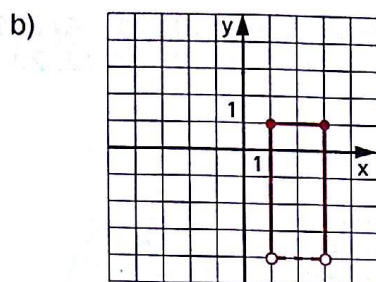
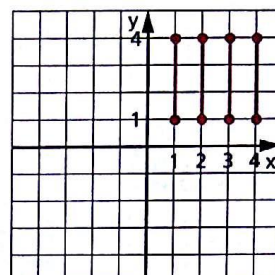
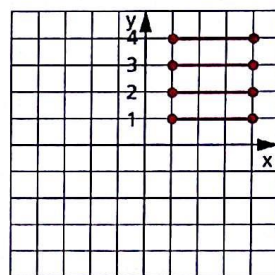
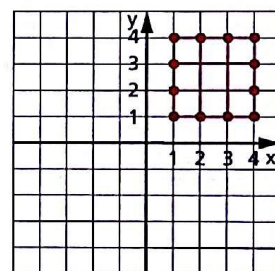
120. a)

b)

c)

d)

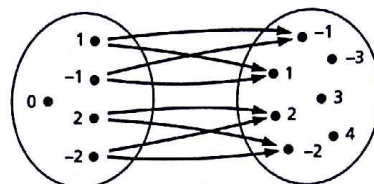
e)

f)

121. a)

b)

c)

122. $A \times A$ está contido em todos os nove.
$A \times B$ está contido em $A \times B$, $A \times C$, $B \times B$, $B \times C$, $C \times C$ e $C \times B$.
$A \times C$ está contido em $A \times C$, $B \times C$ e $C \times C$.
$B \times A$ está contido em $A \times C$, $B \times A$, $B \times B$, $B \times C$, $C \times A$, $C \times B$ e $C \times C$.
$C \times A$ está contido em $C \times A$, $C \times B$ e $C \times C$.
$B \times B$ está contido em $B \times B$, $B \times C$, $C \times B$ e $C \times C$.
$B \times C$ está contido em $B \times C$, $C \times C$ e $C \times B$.
$C \times B$ está contido em $C \times B$ e $C \times C$.
$C \times C$ está contido em $C \times C$.

124. $A^2 = \{(-2, -2), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 3), (0, -2), (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, -2), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (3, -2), (3, 0), (3, 1), (3, 3)\}$

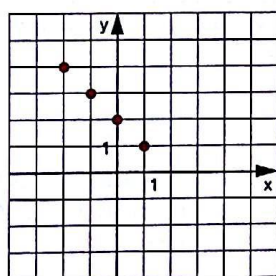
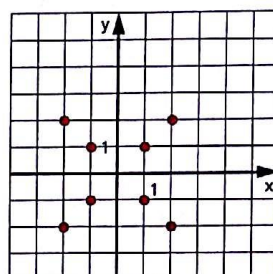
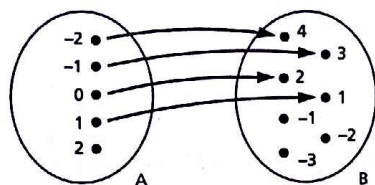
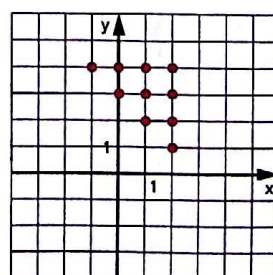
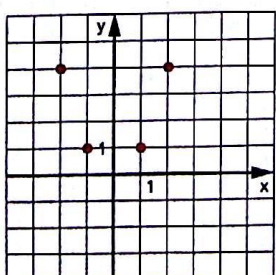
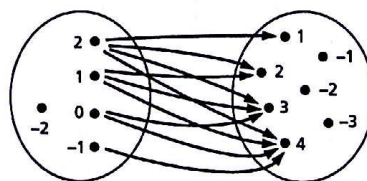
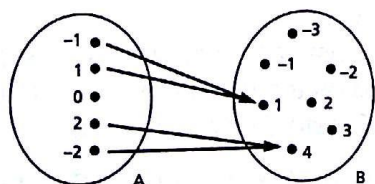
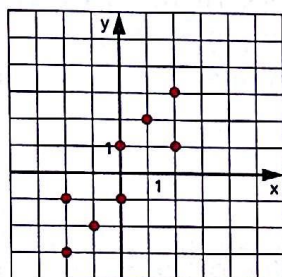
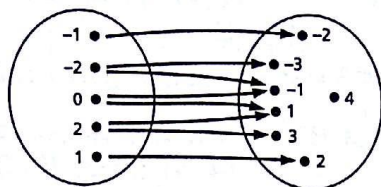
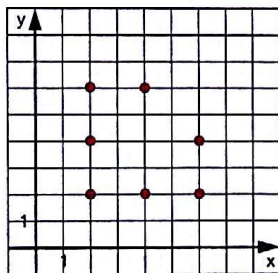
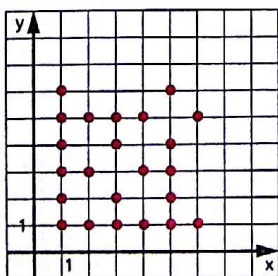
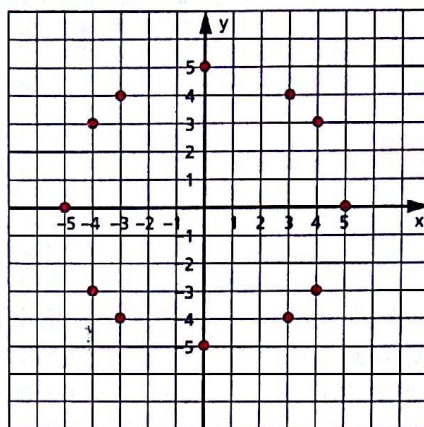
125. $A \times B = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (-1, 5), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (0, 5), (2, -1), (2, 0), (2, 2), (2, 5)\}$

126. $n(F \times G) = 12$

127.

128. n(D) = 3

129. a) R = {(−2, 4), (−1, 3), (0, 2), (1, 1)}

b) S = {(−2, 4), (2, 4), (−1, 1), (1, 1)}

c) T = {(−2, −2), (−2, 2), (−1, −1), (−1, 1), (1, −1), (1, 1), (2, −2), (2, 2)}

d) V = {(−1, 4), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)}

e) $W = \{(-2,-3), (-2,-1), (-1,-2), (0,-1), (0,1), (1,2), (2,1), (2,3)\}$

130. $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 6), (6, 2), (6, 4)\}$

131.

132.

133. a) $D = \{1, 2\}$ e $Im = \{1, 3, 4\}$

b) $D = \{-2, -1, 3, 2\}$ e $Im = \{-7, 4, 1\}$

c) $D = \{2, 1, 5\}$ e $Im = \{1, -3, \sqrt{2}\}$

d) $D = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}\}$ e $Im = \{\sqrt{2}, 1\}$

e) $D = \left\{3, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ e $Im = \left\{\frac{1}{2}, -1, 0\right\}$

134. a) $D(R) = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $Im(R) = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $D(S) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $Im(S) = \{1, 4\}$

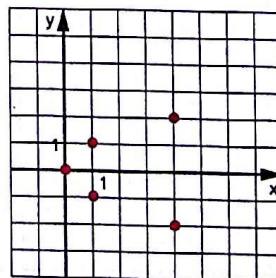
c) $D(T) = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $Im(T) = \{-2, -1, 1, 2\}$

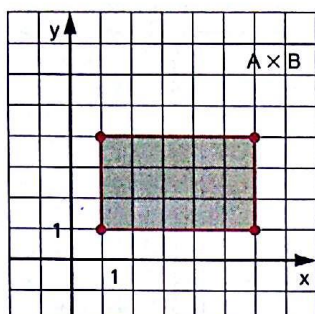
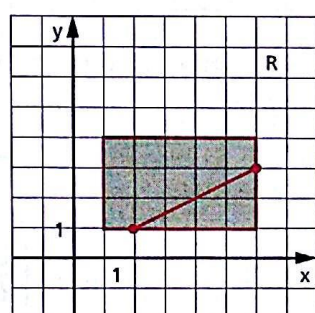
d) $D(V) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Im(V) = \{1, 2, 3, 4\}$

e) $D(W) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $Im(W) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

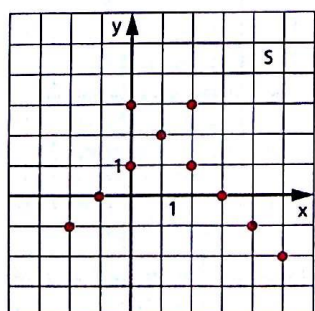
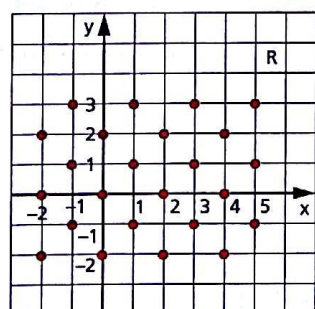
135. a) $R = \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$

b) $D(R) = \{0, 1, 4\}$ e $Im(R) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c)

136. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq +2\}$

137. a)

b)

c) $D(R) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$ e

$Im(R) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$

138. a)

b) $D_R = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = D_s$
$Im_R = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} = Im_s$

c) $R \cap S = \varnothing$

139. a) $R^{-1} = \{(2, 1), (1, 3), (3, 2)\}$

b) $R^{-1} = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, -2)\}$

c) $R^{-1} = \{(-2, -3), (3, 1), (-3, 2), (1, 3)\}$

140. a) $R = R^{-1} = \{(0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)\}$

b) $R = \{(0, 5), (2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1), (10, 0)\}$
$R^{-1} = \{(5, 0), (4, 2), (3, 4), (2, 6), (1, 8), (0, 10)\}$

c) $R = \{(0, 10), (1, 5), (2, 2), (3, 1), (4, 2), (5, 5), (6, 10)\}$
$R^{-1} = \{(10, 0), (5, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 5), (10, 6)\}$

d) $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$
$R^{-1} = \{(1, 0), (2, 1), (4, 2), (8, 3)\}$

141. a)

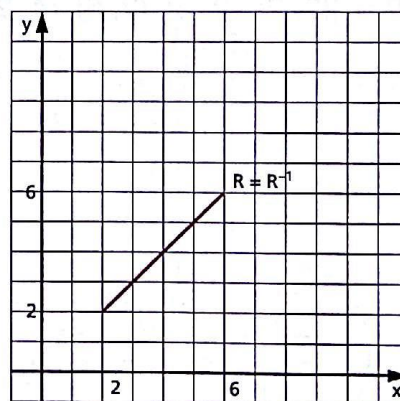
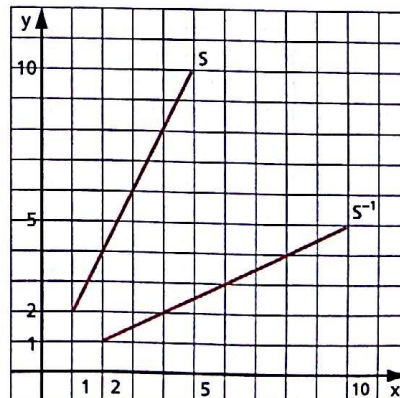
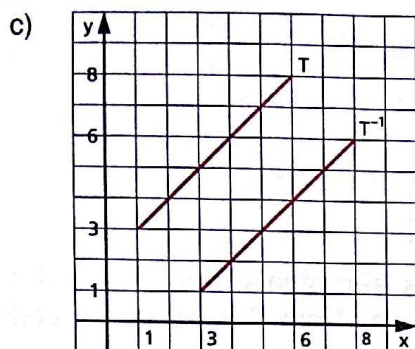
b)

c)

d)

Capítulo V

142. a) Não define função de A em B, pois o elemento $2 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B.

b) Não define função de A em B, pois o elemento $1 \in A$ está associado a dois elementos de B.

c e d) Define função de A em B, pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B.

143. Somente d), pois o conjunto de partida é $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto de chegada é $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

144. a) É função.

b) Não é função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois qualquer reta vertical conduzida pelos pontos $(x, 0)$, com $x > 0$, encontra o gráfico da relação em dois pontos.

c) Não é função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois qualquer reta vertical conduzida pelos pontos $(x, 0)$, com $-1 < x < 1$, não encontra o gráfico da relação.

d) É função.

e) É função.

f) Não é função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois a reta vertical conduzida pelo ponto $(3, 0)$ encontra o gráfico da relação em mais que dois pontos e as retas verticais conduzidas pelos pontos $(x, 0)$, com $x \neq 3$, não encontram o gráfico da relação.

145. a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 1$

d) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2$

146. a) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto -x + 1$

b) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2^x$

c) $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

147. a) $f(2) = 4$

b) $f(-3) = -11$

c) $f(0) = -2$

d) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ não tem significado, pois $\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

148. a) $f(2) = 2$

b) $f(-1) = 8$

c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{4}$

d) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{46}{9}$

e) $f(\sqrt{3}) = 7 - 3\sqrt{3}$

f) $f(1 - \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$

149. $f(2) = 17$

150. a) $f(3) = 1$
b) $f\left(-\frac{3}{7}\right) = 1$
c) $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$
d) $f(\sqrt{4}) = 1$
e) $f(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}$
f) $f(0{,}75) = 1$

152. $x = -4$

153. $x = 2$ ou $x = 3$

155. $f(0) = 0$ para $m \neq 0$

156. 32

158. a) $D(f) = \{0, 1, 2\}$ e $Im(f) = \{-1, 0, 1\}$
b) $D(g) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Im(g) = \{1, 2\}$
c) $D(h) = \{-1, 0, 1\}$ e $Im(h) = \{-2\}$
d) $D(k) = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $Im(k) = \{-2, -1, 0, 2\}$

159. a) $Im = \{-2, 0, 2\}$
b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$
c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 1 \text{ ou } y \geqslant 2\}$
d) $Im = \mathbb{R}$
e) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 2 \text{ ou } y > 4\}$
f) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$

160. a) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $Im = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 2\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 5\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y < 3\}$
e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$ e $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 5\}$
f) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 4\}$ e $Im = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

161. a) $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$
c) $D(h) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$
d) $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$
e) $D(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
f) $D(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2 \text{ e } x \neq 2\}$
g) $D(s) = \mathbb{R}$
h) $D(t) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
i) $D(n) = \mathbb{R} - \{3\}$

162. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

163. $[2, 6]$

164. Todas são iguais, pois são todas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e associam cada número real ao seu cubo.

165. Não são iguais, pois para $x < 0$ temos $\sqrt{x^2} \neq x$.

166. Somente serão iguais se forem funções de A em $\mathbb{R}$, em que A é qualquer subconjunto de $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

167. São iguais, pois $\sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x}}$ para $-1 \leqslant x < 0$ ou $x > 1$.

168. Não são iguais, pois não têm o mesmo domínio.

Capítulo VI

169. a)

b)

c)

d)

170.

171.

172. a)

b)

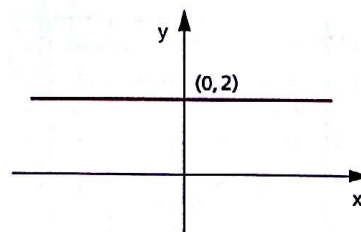
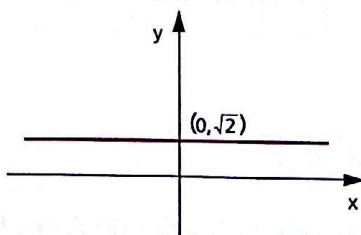
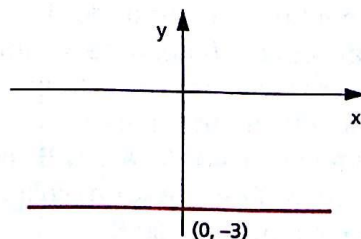
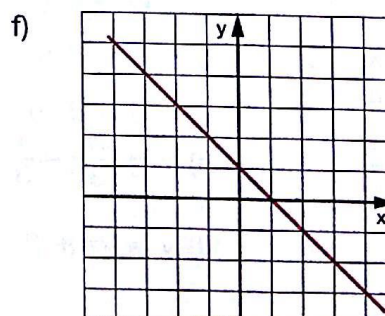
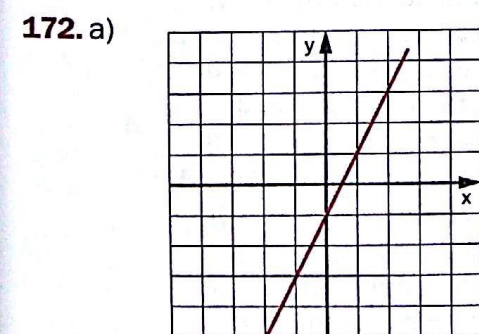
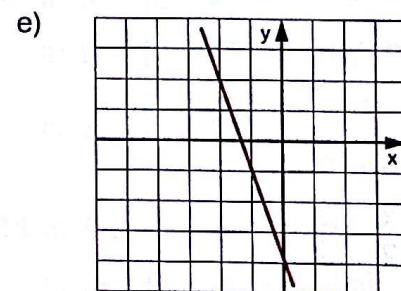
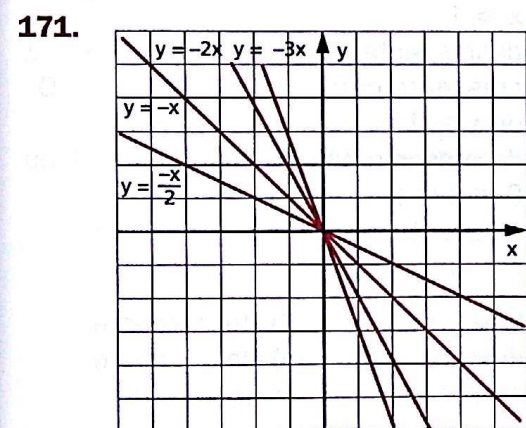
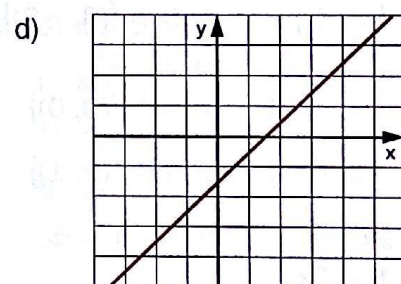
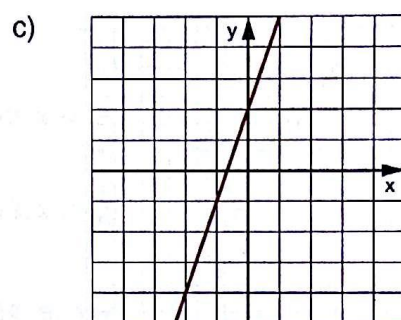
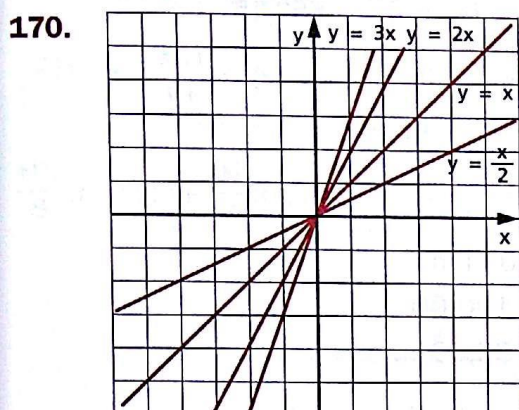
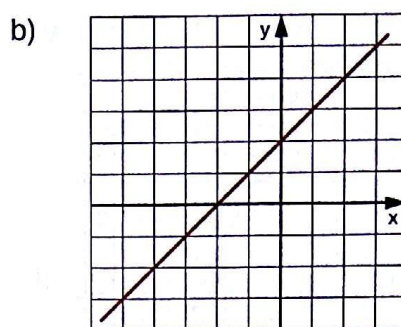
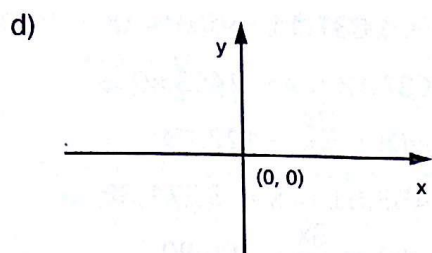
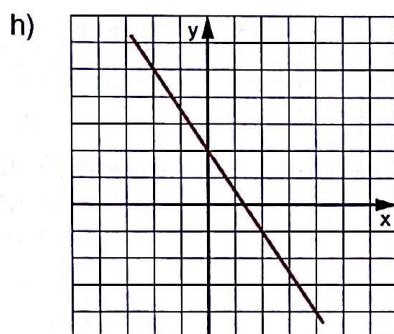
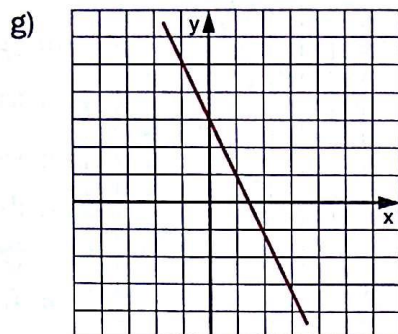
c)

d)

e)

f)

g)

h)

174. a) $S = \{(3, 2)\}$ d) $S = \{(3, -2)\}$
b) $S = \{(-2, 4)\}$ e) $S = \varnothing$
c) $S = \{(2, -1)\}$ f) $S = \{(0, 0)\}$

175. a) $S = \{(3, -1)\}$ b) $S = \{(2, 1)\}$

177. a) $y = 2x - 1$ c) $y = x - 5$
b) $y = \dfrac{1 - 3x}{2}$ d) $y = 2$

178. 23 brancas; 16 pretas

179. $f(3) = -1$

181. $y = -3x - 2$

182. $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$

183. $y = \dfrac{3}{2}x + 4$

184. $y = -\dfrac{x}{3} - 3$

185. a) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$ c) $y = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{3}$
b) $y = -\dfrac{x}{2} + 4$ d) $y = 2x + 3$

186. 20 litros

187. a) $x \leqslant 1637{,}11 \Rightarrow f(x) = 0$
$1637{,}12 \leqslant x \leqslant 2453{,}50 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \dfrac{3x}{40} - 122{,}78$
$2453{,}51 \leqslant x \leqslant 3271{,}38 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \dfrac{3x}{20} - 306{,}80$
$3271{,}39 \leqslant x \leqslant 4087{,}65 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = \dfrac{9x}{40} - 552{,}15$
$x > 4087{,}65 \Rightarrow f(x) = \dfrac{11x}{40} - n$
b) $n = 756{,}53$

188. mãe: $\dfrac{H}{8}$; cada menino: $\dfrac{H}{4}$; a menina: $\dfrac{3H}{8}$

189. 3300 km

190. R$ 100,00

191. R$ 90,00

192. 1

193. 25

194. a) crescente para $x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 1$
decrescente para $x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1$
b) crescente para $x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$
decrescente para $x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1$ ou $0 \leqslant x \leqslant 1$
c) crescente para $x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0$ ou $x > 0$

196. a) crescente d) decrescente
b) decrescente e) decrescente
c) crescente f) crescente

198. a) crescente para $m > -2$
decrescente para $m < -2$
constante para $m = -2$
b) crescente para $m < 4$
decrescente para $m > 4$
constante para $m = 4$
c) crescente para $m < -3$
decrescente para $m > -3$
constante para $m = -3$
d) crescente para $m > 1$
decrescente para $m < 1$
constante para $m = 1$

199. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = -3$ ou $x = 2$ ou $x = 6$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -5$ ou $-3 < x < 2$ ou $x > 6$

$f(x) < 0 \Rightarrow -5 < x < -3$ ou $2 < x < 6$

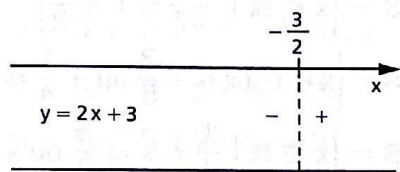
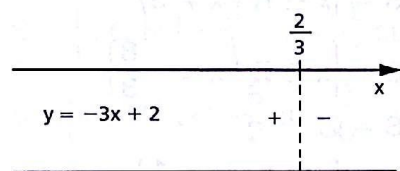
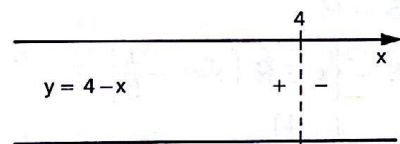
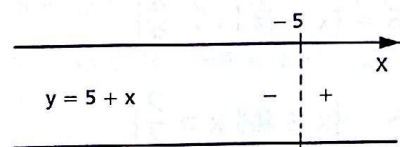
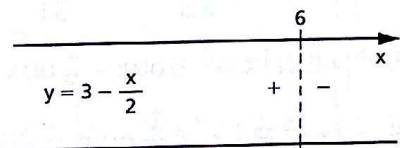
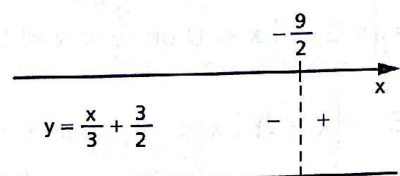
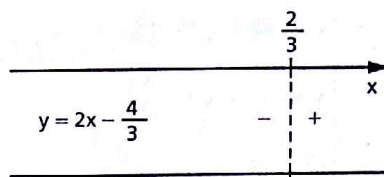
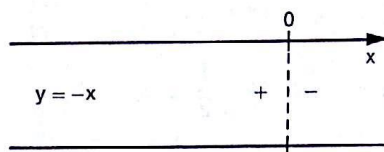
b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -1$ ou $x = 3$

$g(x) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

$g(x) < 0 \Leftrightarrow x < -3$ ou $x > -1$ e $x \neq 3$

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$h(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

200. a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

202. $x < 3$

203. $x > \dfrac{4}{3}$

204. a) $x \geqslant -\dfrac{1}{5}$ b) $x > \dfrac{1}{2}$ c) $\forall x \in \mathbb{R}$

205. a) $x > 2$

b) $x \geqslant 0$

c) $\nexists x \in \mathbb{R}$

d) $x < -2$

e) $x \leqslant 3$

206. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -10\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\dfrac{3}{4}\right\}$

208. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 7\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \mathbb{R}$

209. 7,9 ou mais.

211. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{3}\right\}$

212. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x < 4\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < 1\right\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\right\}$

213. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$

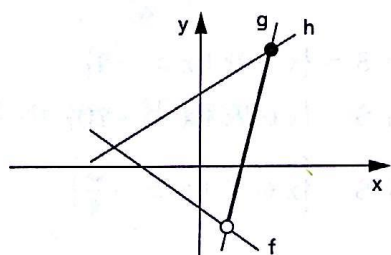
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

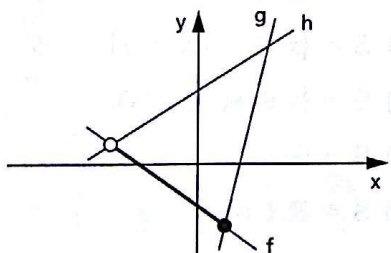
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 6\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{2}{9}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

214. a)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 4\}$

b)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 1\}$

c) $S = \varnothing$

215. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{3}{5}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{4} \text{ ou } -\frac{2}{5} < x < 2\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > 6\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{7}{2} \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{6}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{7} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{3}{5} \text{ ou } -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{3} \text{ ou } x \geqslant \frac{7}{2}\right\}$

216. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{8}{3}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{7}\right\}$

e) $S = \mathbb{R}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{5}\right\}$

g) $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{8}{3}\right\}$

218. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{2}{7}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{2}{5}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -6 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{5}{4}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{5} \text{ ou } x = -3\right\}$

219. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 2\right\}$

220. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{3}{2} \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

221. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{8} \text{ ou } x > \frac{4}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 15\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -10 \text{ ou } x > -\frac{4}{3}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 2\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 3\}$

222. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } -\frac{3}{5} < x < -\frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{4}{5} \text{ ou } -\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{5}{4}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x < 3 \text{ ou } x > 5\right\}$

223. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4 \text{ ou } x > 11\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -2\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{3} \text{ ou } -\frac{29}{24} \leqslant x < -\frac{2}{3}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{4} < x < -\frac{9}{42} \text{ ou } x > \frac{1}{4}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2 \text{ ou } x > 3\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0 \text{ ou } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$

224. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Capítulo VII

225. a)

b)

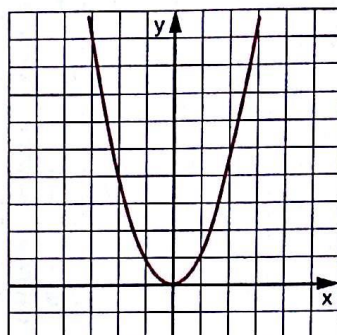
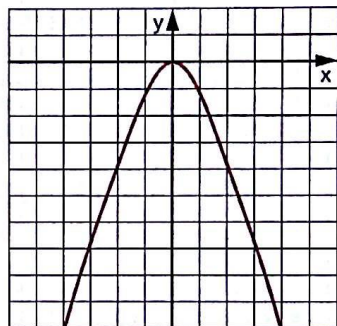
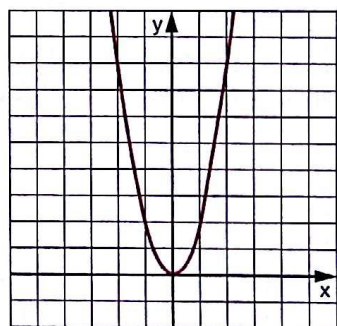
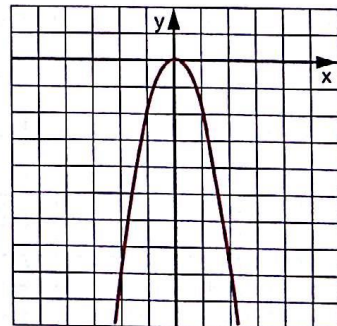
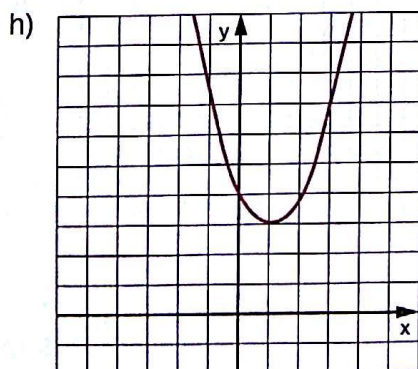
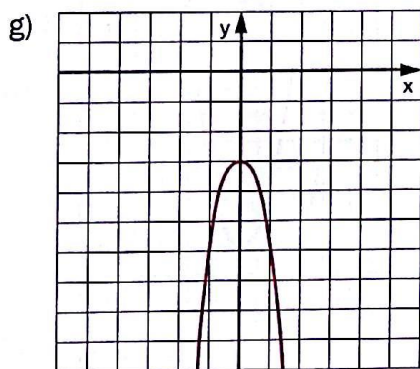
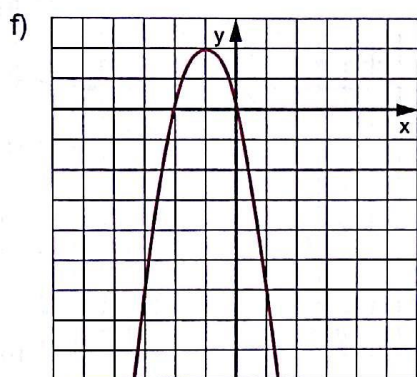
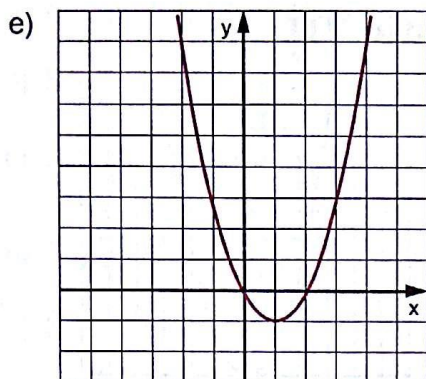
c)

d)

e)

f)

g)

h)

226. $m \neq 2$ e $m \neq -2$

227. $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

228. $abc = -70$

229. a) $x = 1$ ou $x = 2$

b) $x = 3$ ou $x = 4$

c) $x = 2$ ou $x = \frac{1}{3}$

d) Não existe $x \in \mathbb{R}$.

e) $x = -2$

f) $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 2$

g) $x = 1 + \sqrt{2}$ ou $x = 1 - \sqrt{2}$

h) Não existe $x \in \mathbb{R}$.

i) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $x = -1$ ou $x = \sqrt{3}$

k) $x = 0$ ou $x = 2$

l) $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

m) Não existe $x \in \mathbb{R}$.

n) $x = 0$

230. 50

231. $S = \{(3, 4), (4, 3)\}$

232. a) $S = \{-1, 4\}$

b) $S = \{(4, -4), (-1, 6)\}$

234. a) $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

b) $x = 3$ ou $x = -3$

c) $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

d) $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

e) Não existe $x \in \mathbb{R}$.

f) Não existe $x \in \mathbb{R}$.

g) $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

h) $x = 2$ ou $x = -1$

236. $m > -\frac{9}{16}$ e $m \neq 1$

237. $m \leqslant \frac{17}{16}$ e $m \neq -2$

238. $m = -1$ ou $m = \frac{1}{3}$

239. $m = -2$ ou $m = \frac{2}{5}$

240. $m < -\frac{13}{12}$

241. $m < -\frac{1}{4}$

242. São as mesmas de $ax^2 + bx + c$, multiplicadas por $\alpha\beta$.

244. a) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{29}{4}$

b) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{29}{2}$

c) -5 f) $\frac{155}{8}$

245. $m = 2\sqrt{2}$

246. $|x_1 - x_2| = 46$

247. $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$

248. $m = -3$

249. $k = 6$

251. a) $x^2 + x - 6 = 0$

b) $4x^2 + 4x - 3 = 0$

c) $x^2 - 5{,}4x + 2 = 0$

d) $x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

e) $x^2 - 2x - 2 = 0$

252. a) $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$

b) $cx^2 + bx + a = 0$

c) $acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$

d) $a^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + c^3 = 0$

253. $m = -2 + \sqrt{6}$ ou $m = -2 - \sqrt{6}$

254. $g(x) = x^2 - \frac{p}{q}x + \frac{1}{q}$

255. $m + n = 80$

256. a) $V(0, -4)$ d) $V\left(\frac{1}{4}, \frac{25}{16}\right)$

b) $V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ e) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{36}\right)$

c) $V\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ f) $V\left(\frac{7}{6}, -\frac{121}{36}\right)$

257. a) $x_m = -\frac{5}{4}$ e $y_m = -\frac{25}{8}$

b) $x_M = 2$ e $y_M = 12$

c) $x_m = 1$ e $y_m = 0$

d) $x_m = \frac{7}{4}$ e $y_m = -\frac{9}{16}$

e) $x_M = \frac{5}{2}$ e $y_M = -\frac{3}{4}$

f) $x_M = \frac{4}{3}$ e $y_M = \frac{7}{18}$

258. $m = 2$

259. $m = -2$ ou $m = 1$

260. $m = -1$

261. Não existe $m \in \mathbb{R}$.

263. $y_M = y_V = \frac{21}{4}$; $y_m = f(6) = -7$

264. Não tem máximo, porque $a > 0$.

265. $v = 8$

266. $x = 2$ e $z = 4$

267. quadrado de lado 5 cm

268. 3 e 3

269. retângulo de lados $\frac{5}{8}$ e $\frac{5}{2}$

270. retângulo de lados 4 cm e 3 cm

271. retângulo de lados 2 cm e $\sqrt{3}$ cm

272. retângulo de lados 2 cm e 3 cm

273. 4

274. 2

275. a) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{4}\right\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

c) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{3}{4}\right\}$

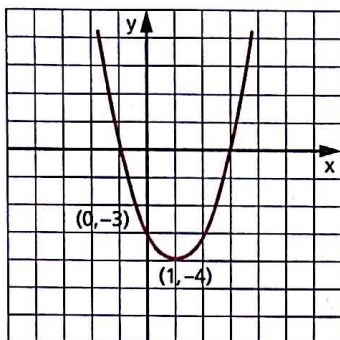
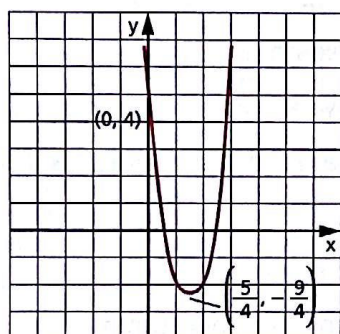
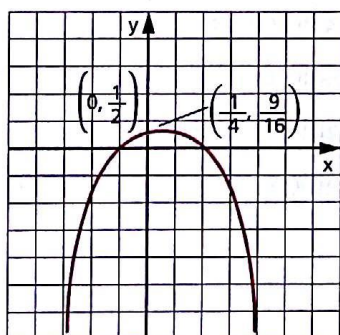
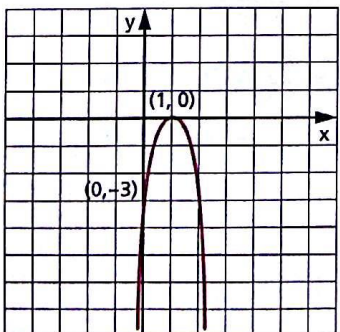
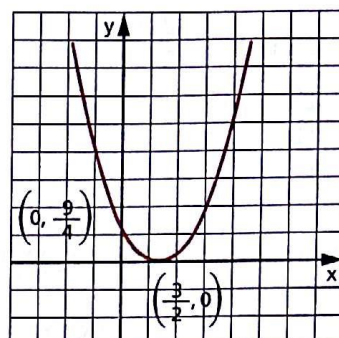
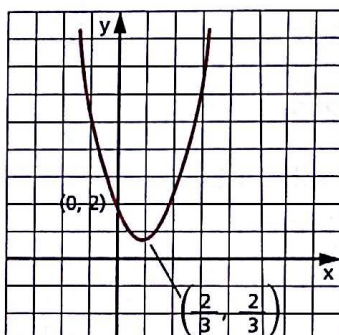
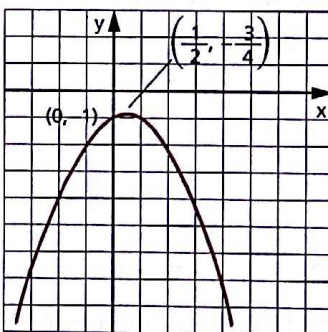
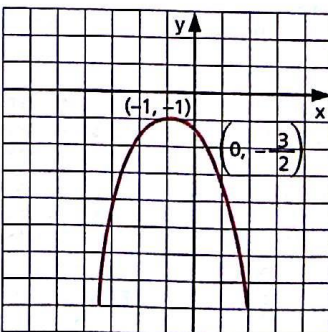
d) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 16\}$

e) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{25}{16}\right\}$

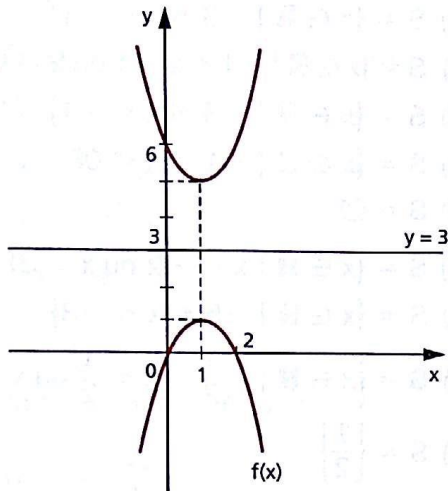
f) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{1}{2}\right\}$

276. $m = \dfrac{10}{3}$

277. $m = \sqrt{10}$ ou $m = -\sqrt{10}$

281. a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

282. $0 < c < b < a$

285. $a = 2$

286. $g(x) = x^2 - 2x + 6$

287. $A = 9$

288. a) $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 3$
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$
$x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

b) $4x^2 - 10x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$
$4x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$
$4x^2 - 10x + 4 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

c) $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$
$-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$
$-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$

d) $-3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$-3x^2 + 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

e) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$
$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

f) $3x^2 - 4x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

g) $-x^2 + x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

h) $-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

289. $x_1 < x < x_2$ (x deve estar entre as raízes)

290. $\Delta < 0$ e $\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ a < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

294. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$

f) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

g) $S = \mathbb{R}$

h) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

i) $S = \mathbb{R}$

j) $S = \mathbb{R}$

k) $S = \varnothing$

l) $S = \varnothing$

295. para todo x real

296. $A \cap B = \varnothing$

297. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

298. $20 < q(a) < 30$

299. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

301. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -3 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

302. a) $P_1\ (5, 0)$ e $P_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5\right\}$

303. 19

304. $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

305. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } 5 < x < 6\}$

307. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{4} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > 2\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant \frac{2}{3}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x \geqslant 0\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{2}{3}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 2 \text{ ou } 3 \leqslant x < 5\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{3}{4} < x < -\frac{1}{3}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -\frac{3}{4} \text{ ou } 1 < x < \frac{5}{2}\right\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

308. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 \leqslant x < 1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } -1 < x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$

309. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

310. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

311. a) Significa obter para quais valores *x* a função está definida.

b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x < 5\}$

312. $D_Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 2 < x \leqslant 5\}$

313. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

314. $-4 \leqslant x < -3 \text{ ou } -1 < x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 3, x \in \mathbb{R}$

315. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leqslant 6\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < -1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

f) $S = \varnothing$

316. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x < -3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

317. a) V b) V c) F d) F e) V

318. a) F b) F c) F d) V e) V

320. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

f) $S = \mathbb{R}$

322. a) $m > \frac{9}{4}$ f) $1 < m < \frac{4}{3}$

b) $m \leqslant \frac{1}{4}$ g) $m \leqslant -2$

c) $0 < m < 4$ h) $m \geqslant 3$

d) $\nexists\, m \in \mathbb{R}$ i) $m < -2$

e) $\nexists\, m \in \mathbb{R}$ j) $m \geqslant 1$

324. a) $-2 < m < 2$ c) $m < -\frac{3}{4}$

b) $m < 1$ d) $-1 < m < 2$

325. $p > 11$

326. $-2 < m < -1$

327. $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$

328. $0 < m < 8$

329. $k \geqslant 9$

331. a) $0 < m < \frac{7}{9}$

b) $m > 1$

c) $-2 < m < 0$

d) $-3 < m < x$

332. $m < -1$

333. $-2 < m < 2$

334. $k = 1$

336. $m < \frac{3}{2}$ ou $3 < m \leqslant \frac{7}{2}$

337. $m < -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

338. $m < -5$

339. $-5 < m < -1$

340. $1 < m < 4$

341. $-\frac{3}{2} < m < -1$

342. $0 < m < \frac{1}{2}$

343. $m < \frac{3}{2}$ e $m \neq 0$ ou $m > 3$

344. $m > 1$

345. $-\sqrt{2} < m < -1$

346. $-1 < m < 2$

347. $m > 1$

348. $m < -2$ ou $2 < m < 3$

349. $-\frac{1}{4} \leqslant m < 0$ ou $m > 2$

350. $k = 1$

351. a) 49 b) 30 c) 6

352. $m < \frac{5}{2}$

353. duas raízes negativas

Capítulo VIII

354. a)

b)

c)

d)

e)

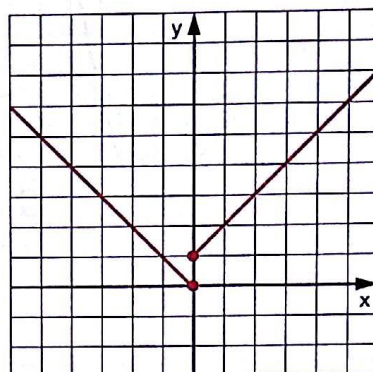
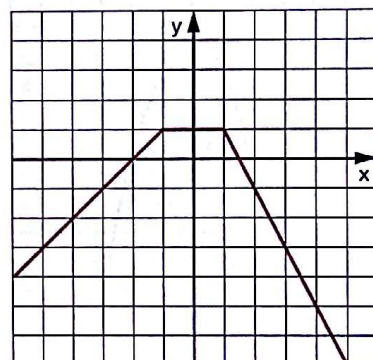
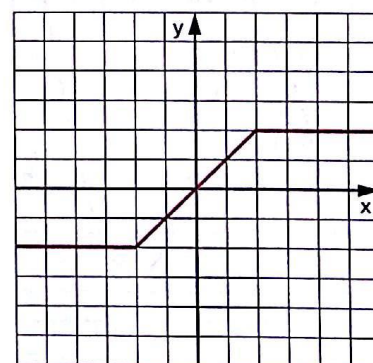
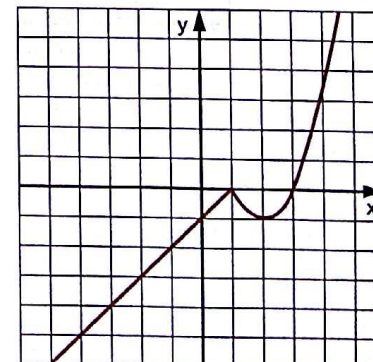
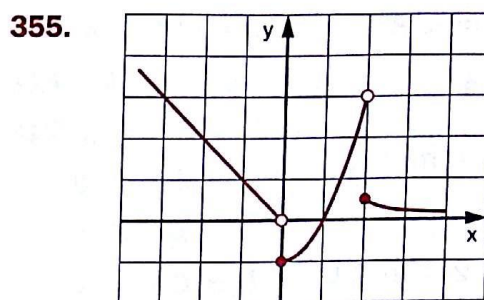
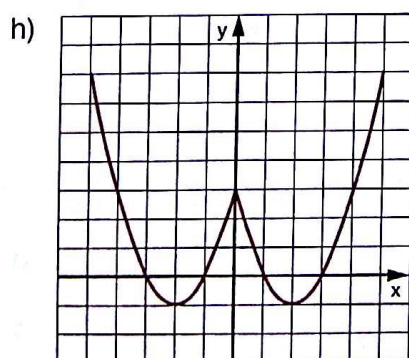
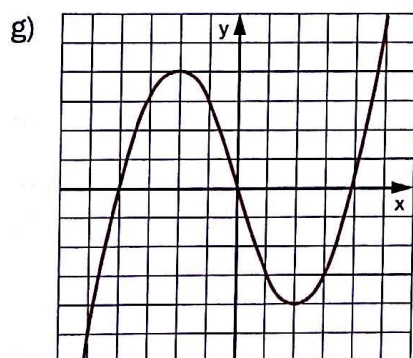
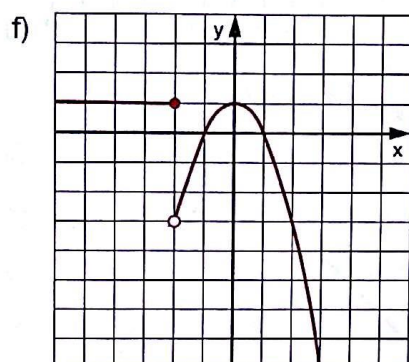
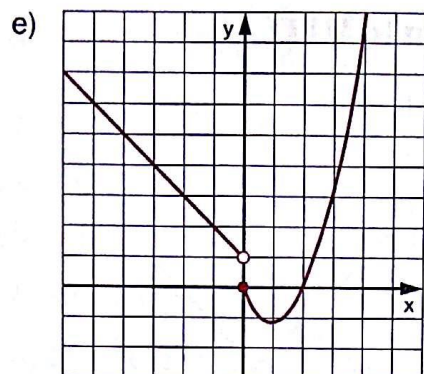
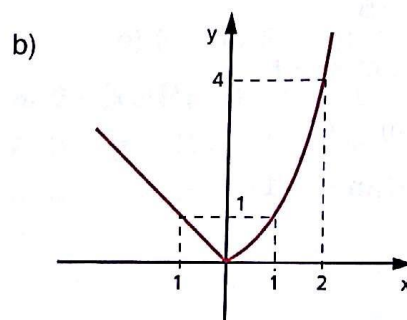
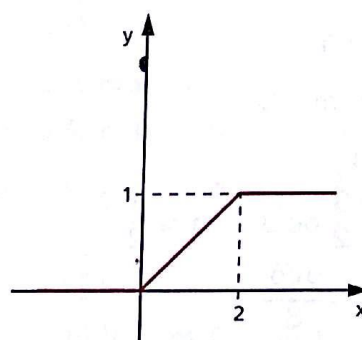
f)

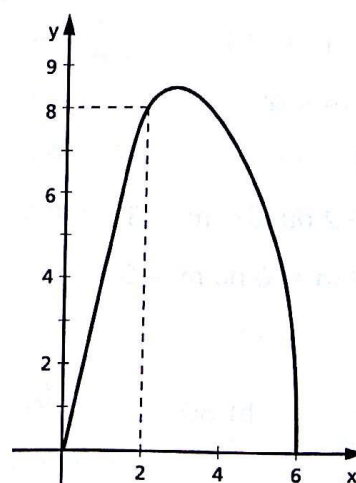
g)

h)

355.

356. a)

b)

358. $x = 4$

359. a)

b) $f(x) = 5$ para $x = \frac{5}{4}$ ou $x = 5$

360. a) não c) sim e) sim
b) sim d) não

361. a)

b)

c)

d)

e)

f)

363. a)

b)

g)

365. a)

b)

c)

d)

e)

f)

366. a)

b)

d)

368. a)

e)

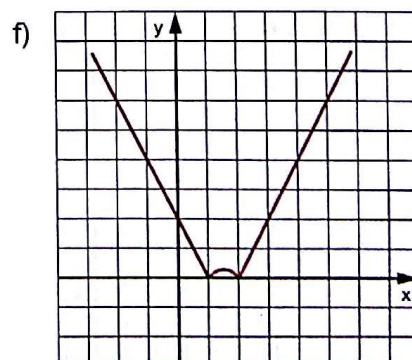
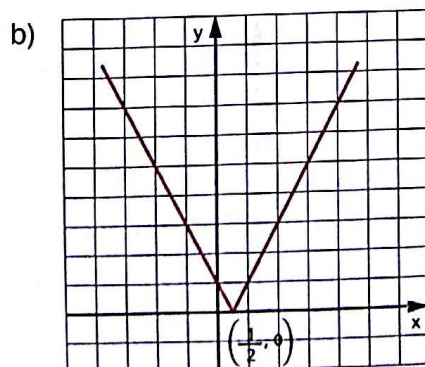
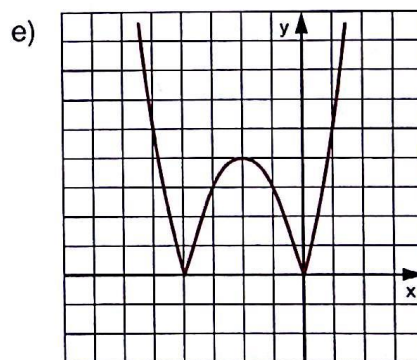
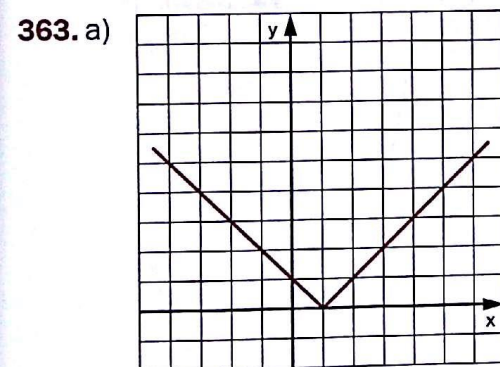
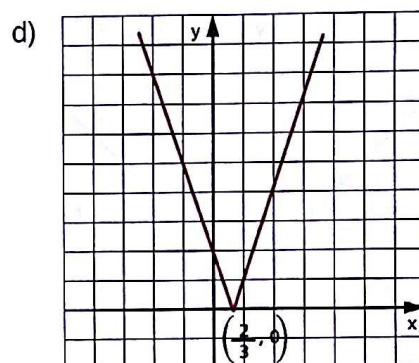
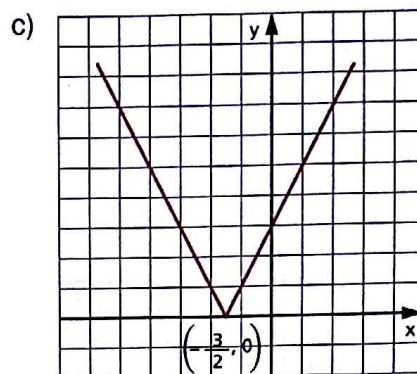
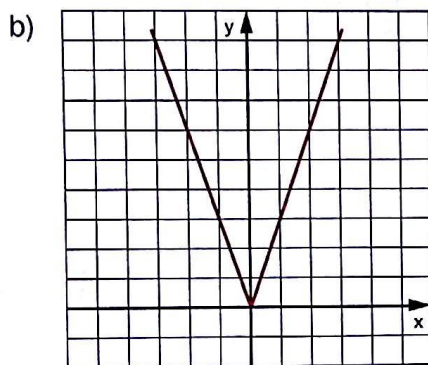
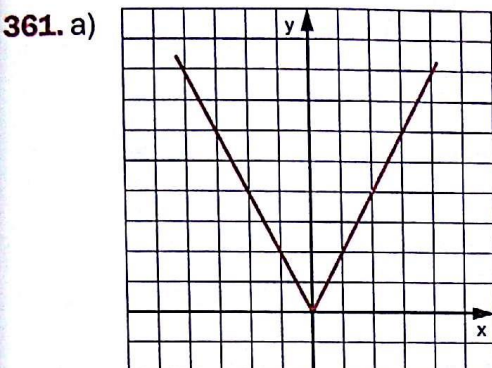
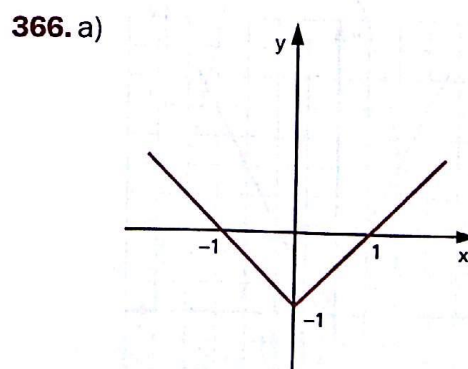
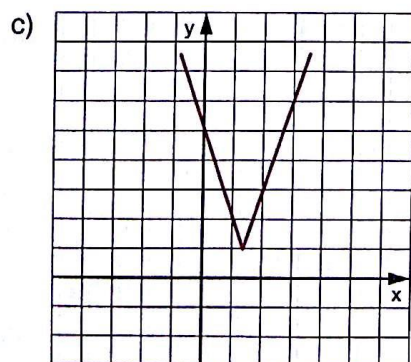
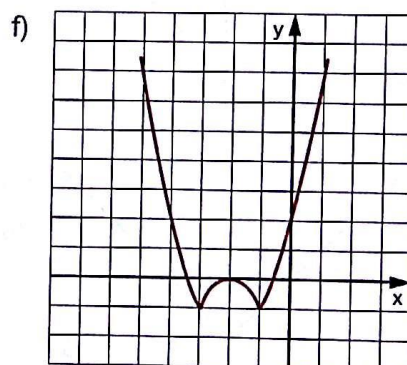
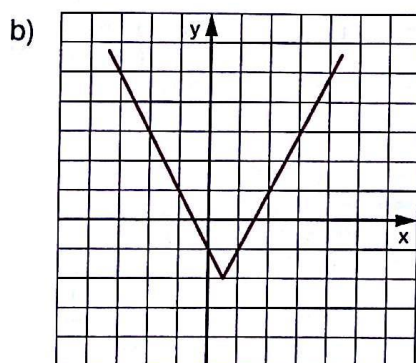
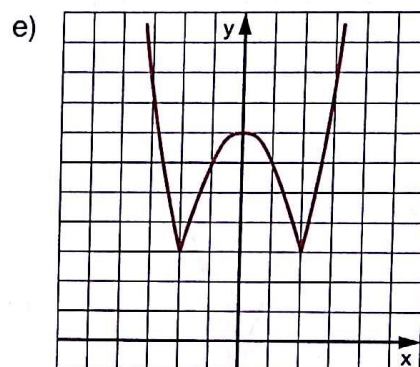
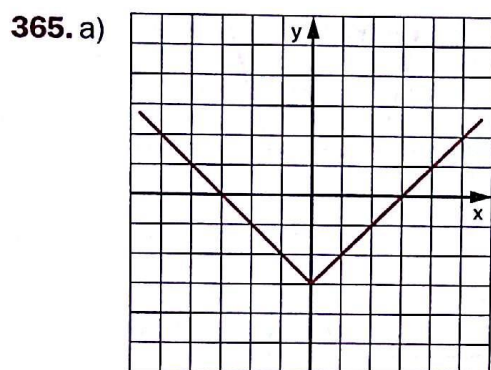
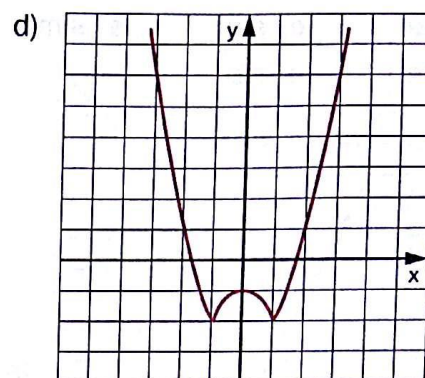
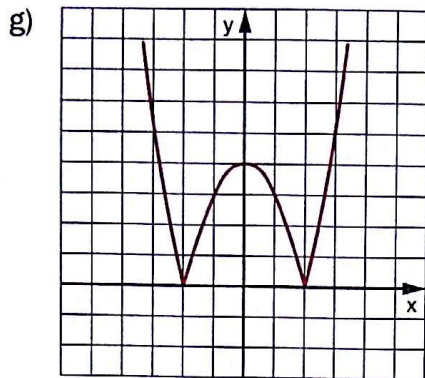
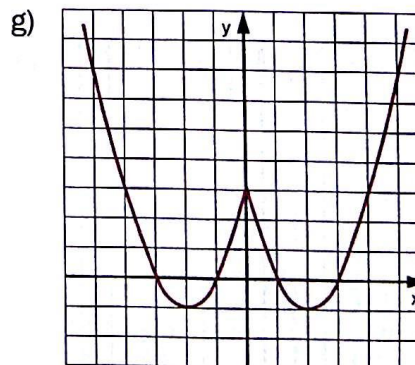
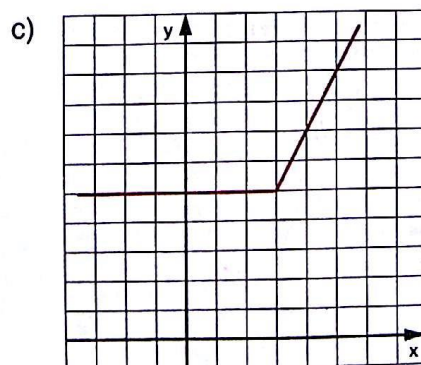
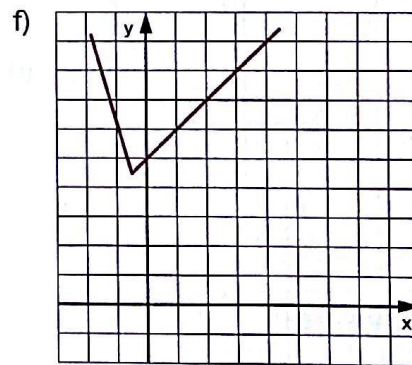
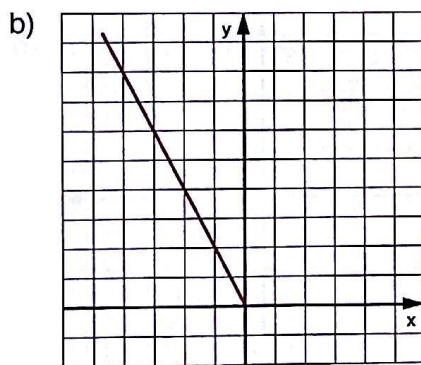
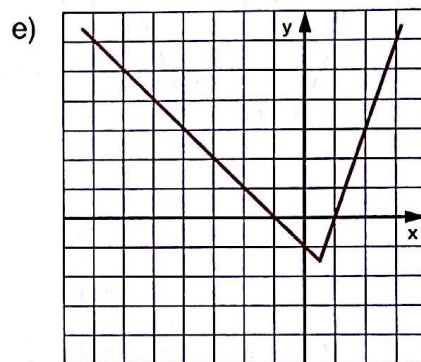
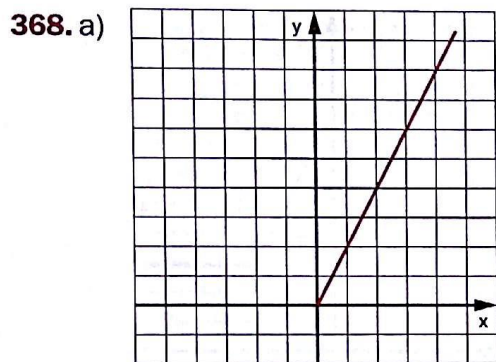
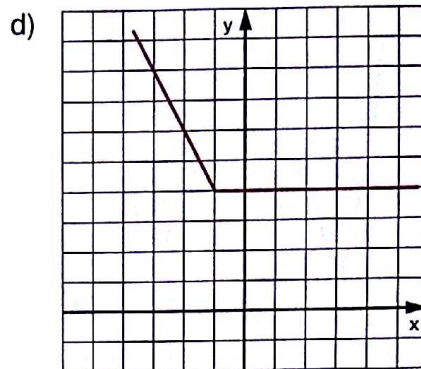
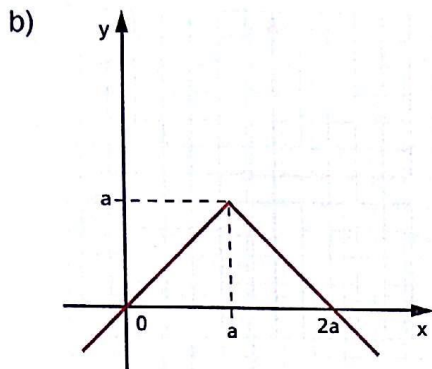
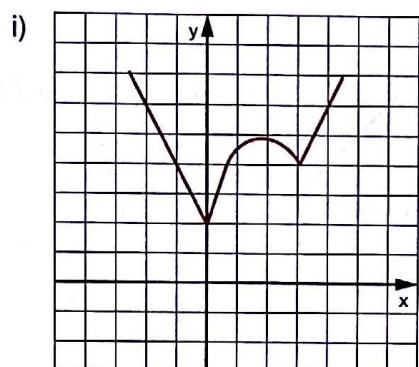
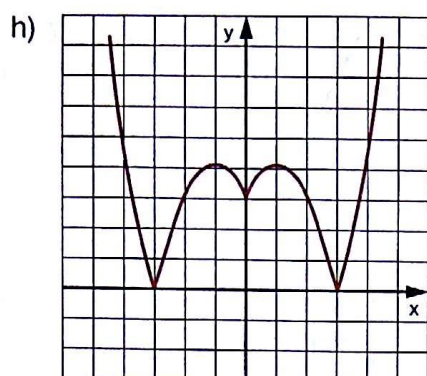
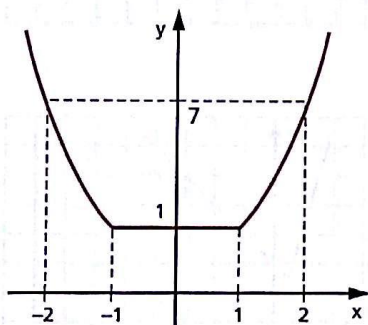
b)

f)

c)

g)

h)

i)

369.

370. $Im_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

371. a, b, c

372.

373.

375. a)

b)

376. a)

b)

c)

d)

e)

f)

378. a)

b)

c)

d)

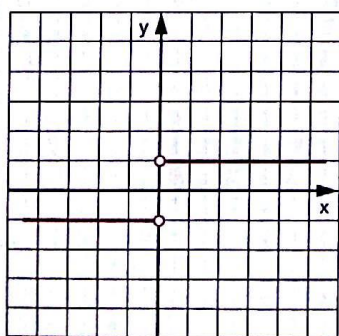
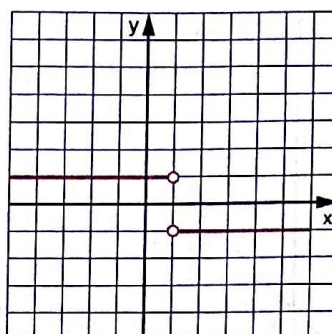
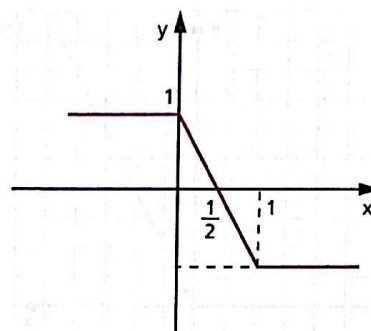
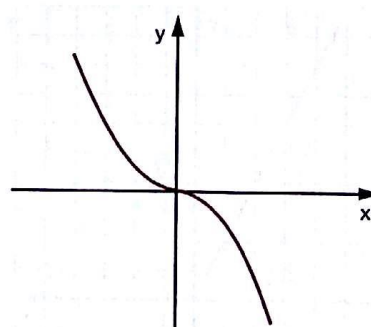
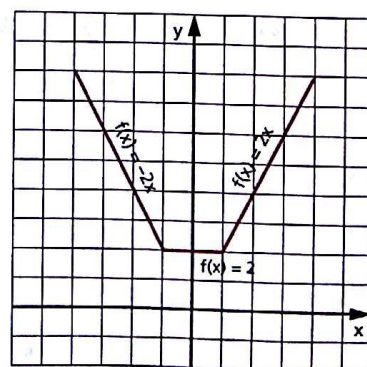
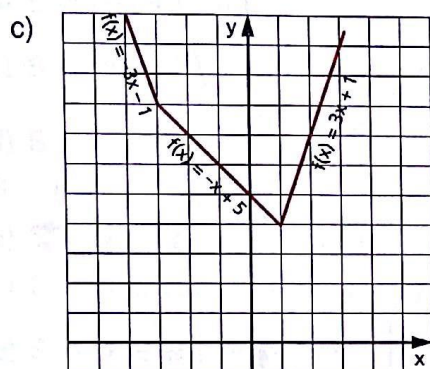
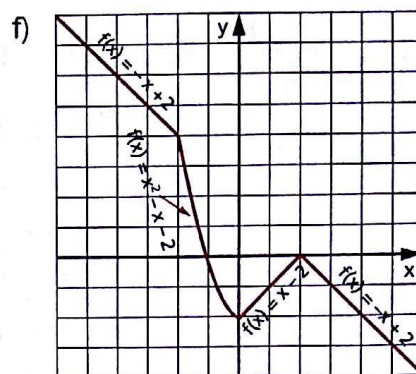
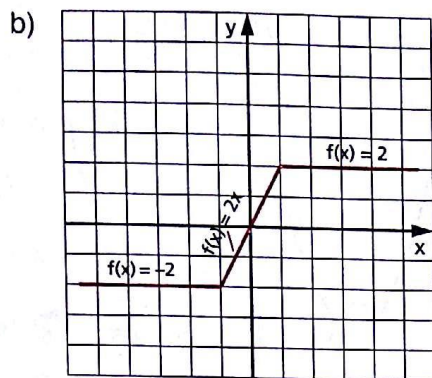
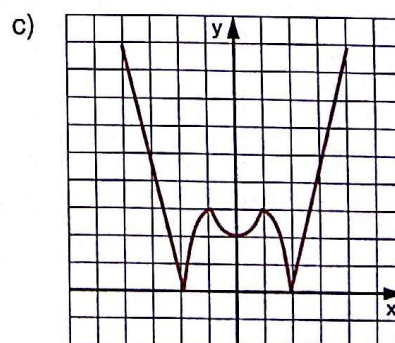
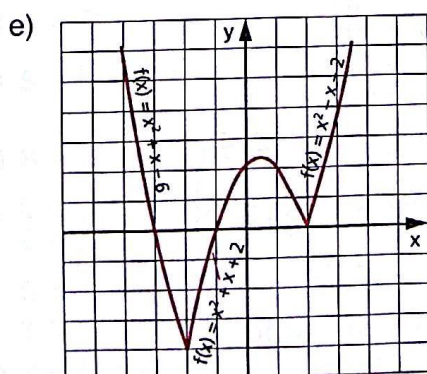
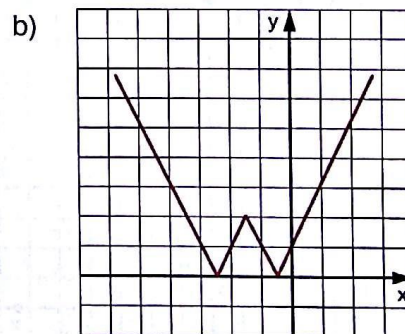
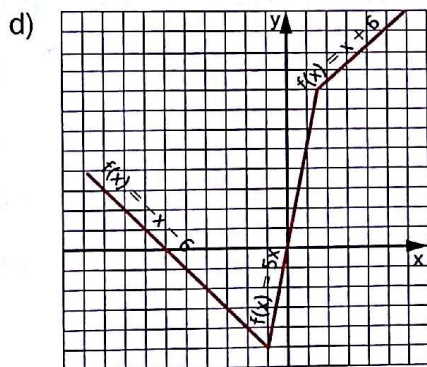
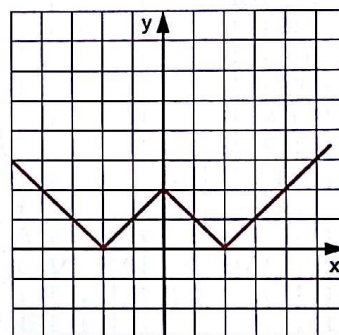
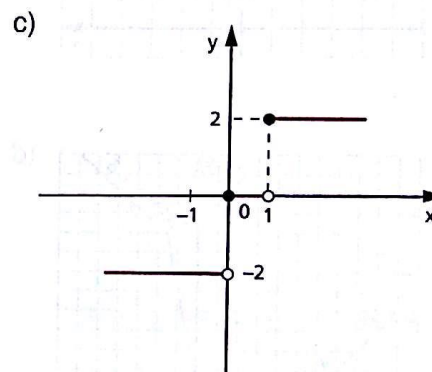
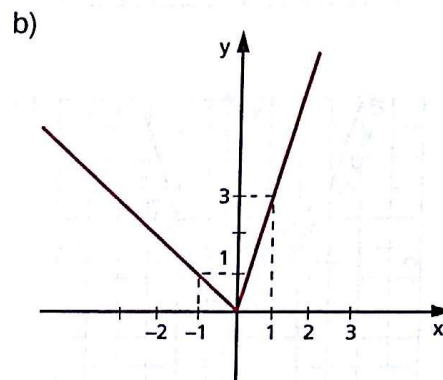
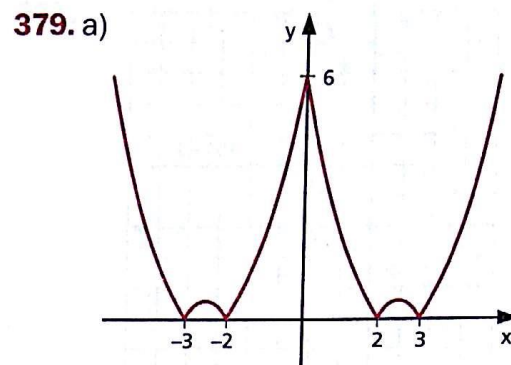
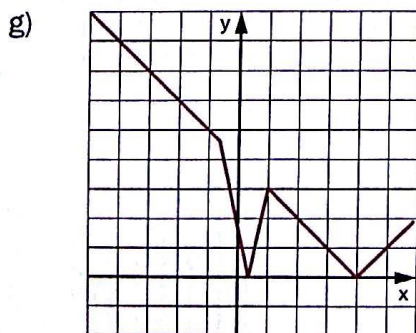
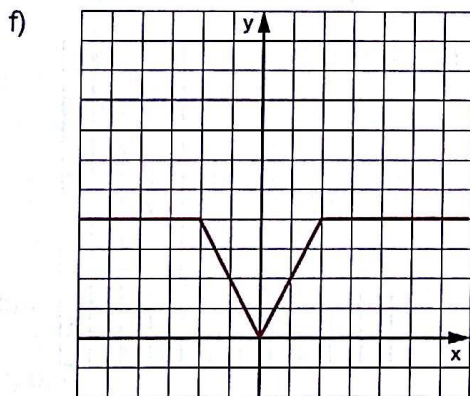
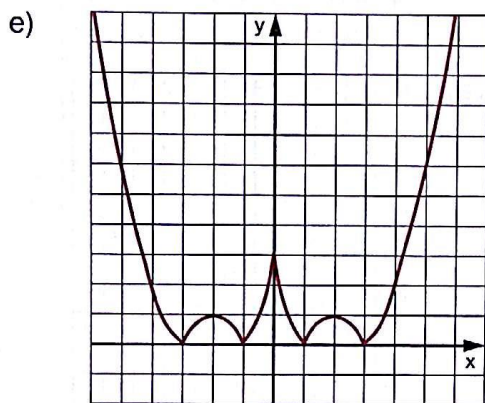
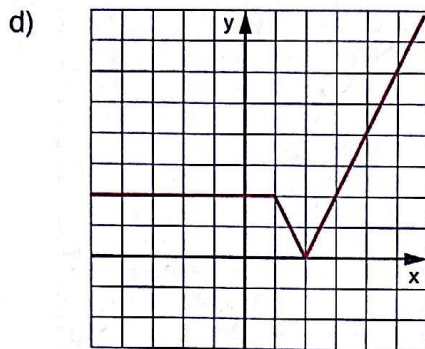
e)

f)

g)

379. a)

b)

c)

380. a, b, c e d

381. a) $S = \{1, -5\}$

b) $S = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \{-1, 1, 2, 4\}$

f) $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\}$

g) $S = \{1, 3\}$

382. a) Demonstração

b) $k > 1$

383. a) $S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$

b) $S = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \{-6, -1, 1, 4\}$

d) $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 1\right\}$

384. a) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{4, 2\}$

d) $S = \{-13, -6\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{2}{3}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{4}{3}\right\}$

385. $S = \{-2, 2\}$

387. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

388. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

d) $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{8}{5} \text{ ou } x \geqslant 0\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{3}\right\}$

j) $S = \mathbb{R}$

k) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } 2 < x \leqslant 4\}$

389. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 6\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \text{ e } x \neq \frac{1}{3}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{5} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 4\}$

390. 29

391. a) V b) V c) V d) V e) F

392. 1

393. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 7\}$

394. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 0 < x < 1\}$

395. 3

396. a) V b) V c) F d) F e) V f) F

397. −1, 0, 3 e 4

399. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

d) $S = \mathbb{R}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 6\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$

400. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

401. a, b, c, e

402. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

404. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } 1 < x < 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 0\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5 \text{ ou } -3 \leqslant x \leqslant 7\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < \frac{11}{3}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$

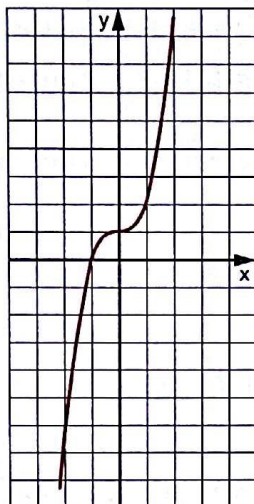
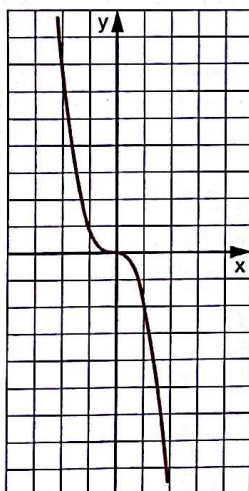
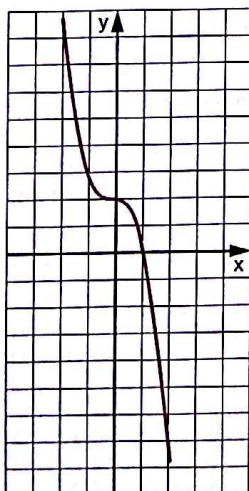
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

g) $S = \varnothing$

405. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 6\}$

406. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$

Capítulo IX

407. a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

408. a)

b)

c)

d)

410. a)

b)

c)

c)

d)

411. a)

b)

413. $\frac{35}{12}$

414. a)

b)

c)

418. a)

b)

415.

$S = \{(-1, 1), (1, 1)\}$

420. a)

416. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

417.

b)

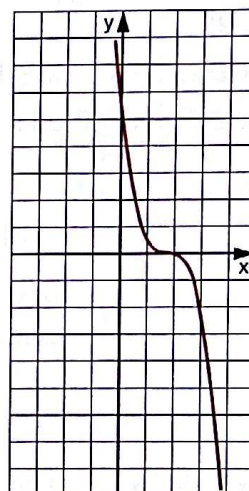
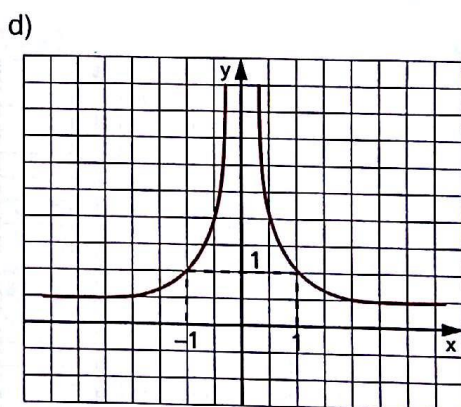
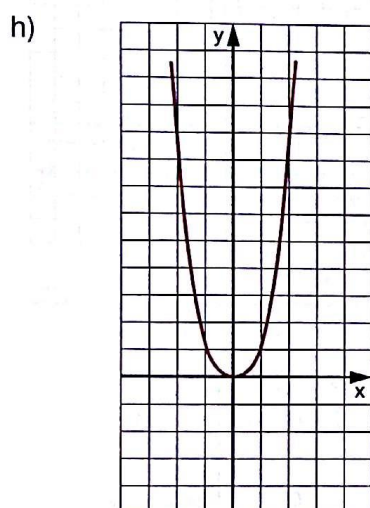
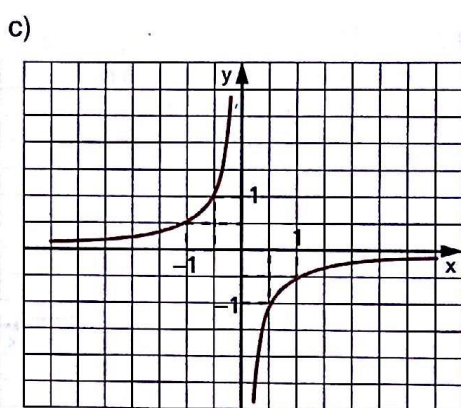
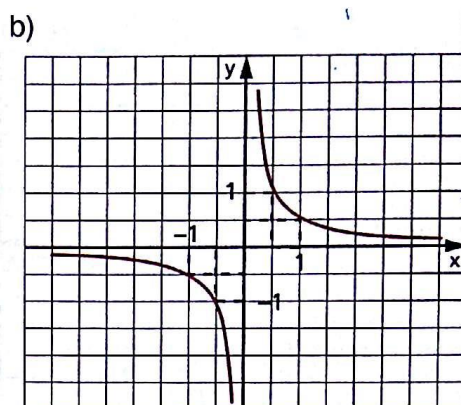
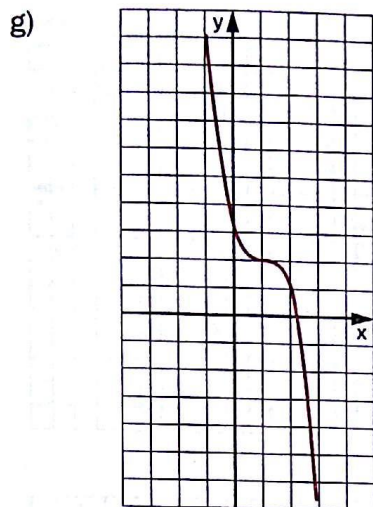
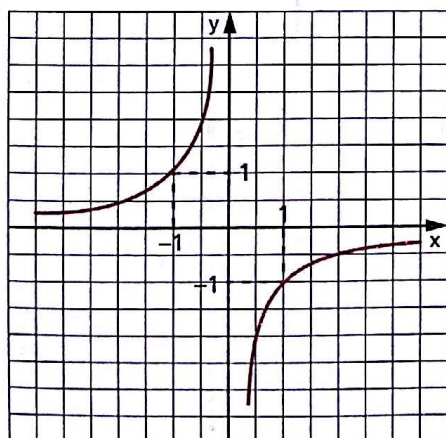
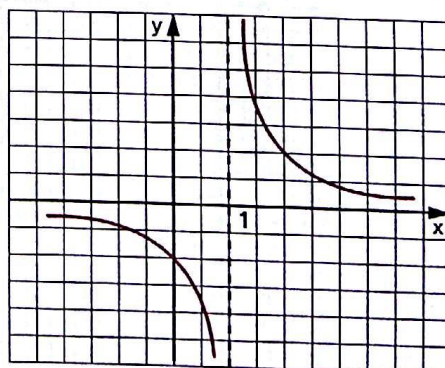
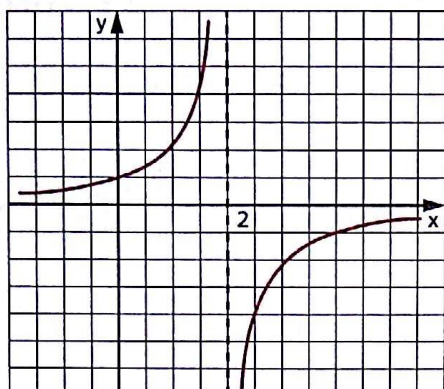
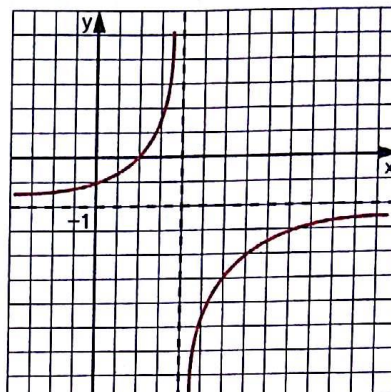
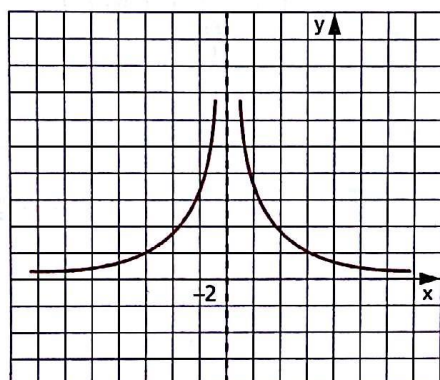
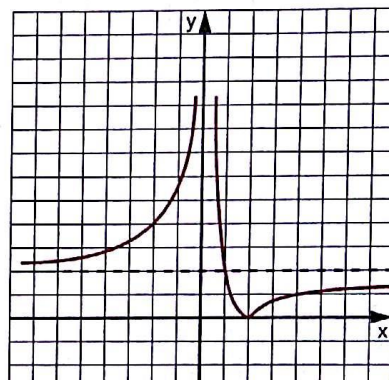
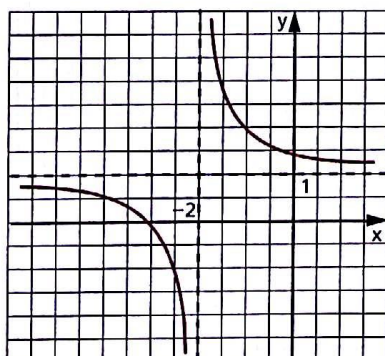
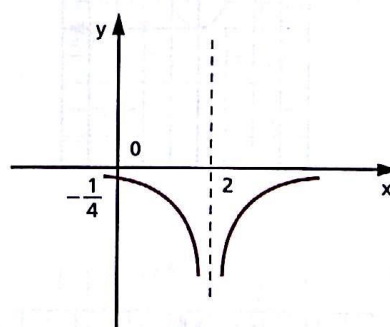
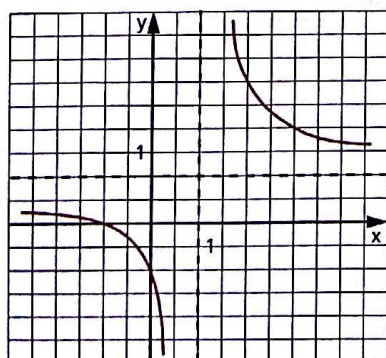
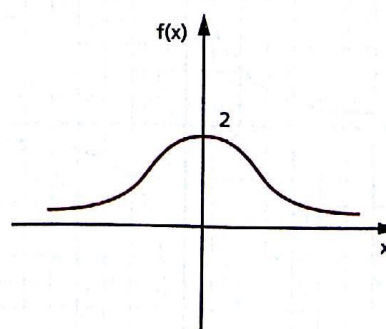
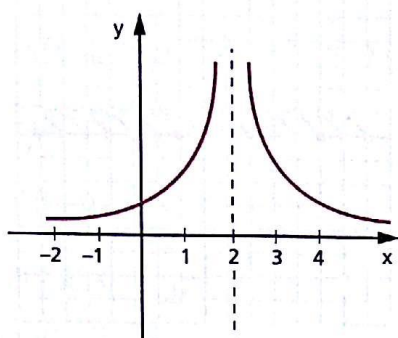
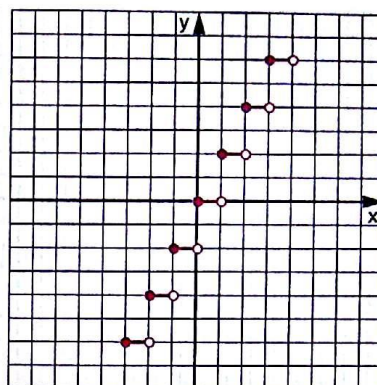
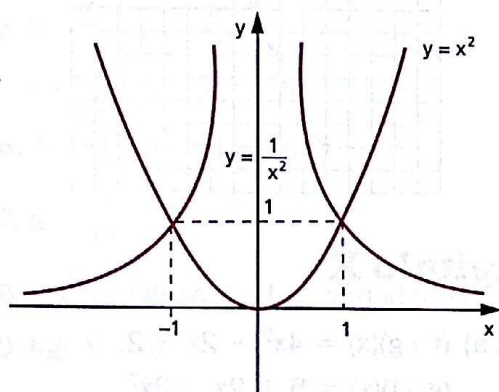
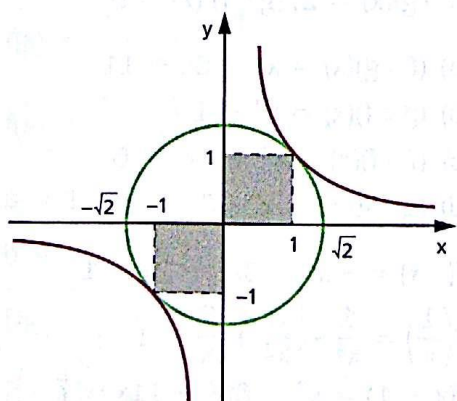
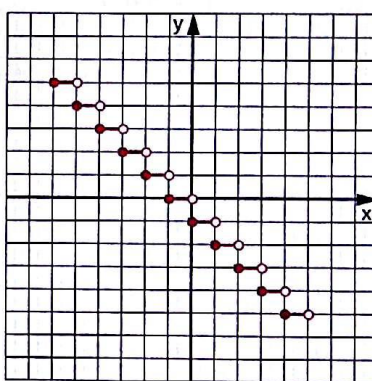
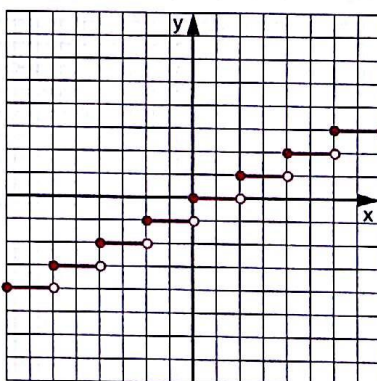
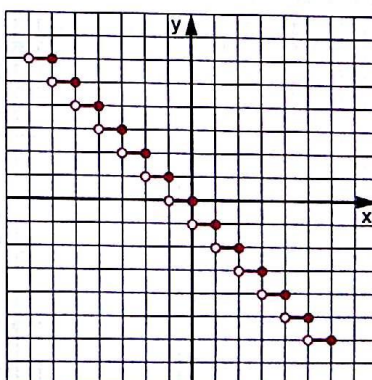
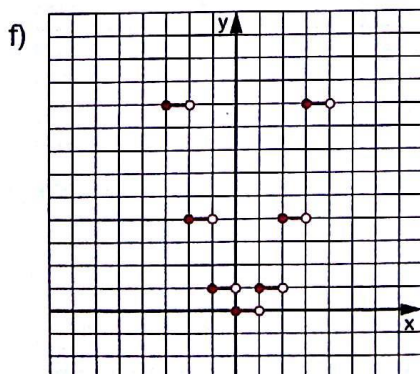
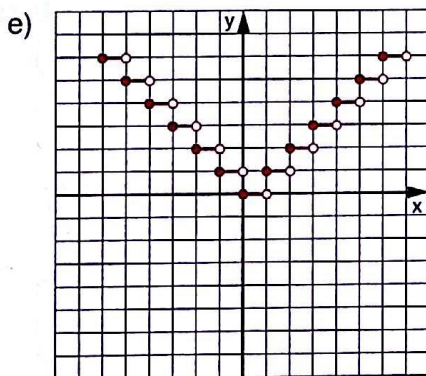
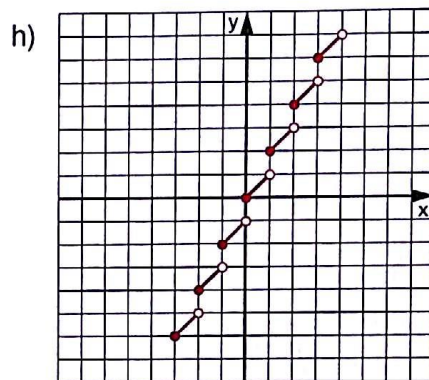
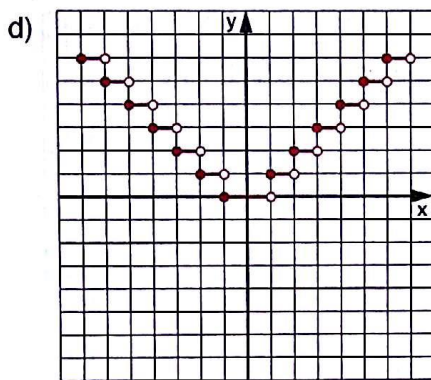
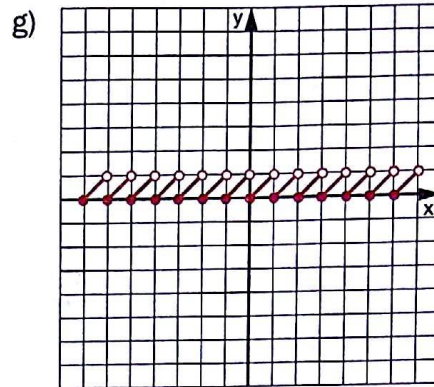
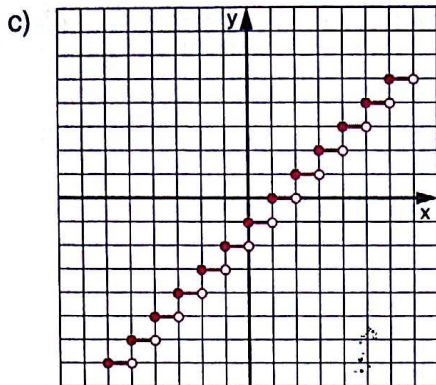
c)

g)

d)

h)

e)

f)

Capítulo X

422. a) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x - 2$

$(g \circ f)(x) = 5 + 2x - 2x^2$

b) $(f \circ g)(-2) = 18$, $(g \circ f)(-2) = -7$

c) $x = 2$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

423. $(f \circ g)(x) = x^4 - 6x^2 + 6$

$(g \circ f)(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$

424. $(f \circ g)(x) = 2$, $(g \circ f)(x) = 5$

425. a) $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 11$

b) $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$

c) $(f \circ f)(x) = x^4 + 4x^2 + 6$

d) $(g \circ g)(x) = x - 6$

426. $f(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1$

$f(x - 1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 7$

427. $a = 1$

431. a) $D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

b) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

432. a) $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{2x + 4}{2x + 1}$

b) $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$(g \circ f)(x) = \dfrac{5x - 4}{x - 2}$

433. $[(h \circ g) \circ f](x) = 12x^2 + 12x + 2$

434. $[(h \circ (g \circ f)](x) = 2x^2 - 2x + 7$

435. $\theta = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi$, $\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ou

$\theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi$

436. $(a, 3a - 3), \forall a \in \mathbb{R}$

437. $a = \dfrac{m + 4}{m + 2}$

438. a, c, e: falsos; b, d, f: verdadeiros

439. $f(g(x)) = 3$

440. $(f \circ [f \circ f])(x) = x$

441. $((h \circ f) \circ g)(2) = 5$

442. $x = -\frac{1}{2}$

443. $d(a - 1) = b(c - 1)$

445. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{2}$

447. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2}$

448. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$ para $x \neq 1$

449. $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$

450. $b = -3$

451. $D_{f(x)} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

452. $f\left(-\frac{12}{15}\right) = 7$

453. 7

454. a) $k = -1$; $t = 3$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$

456. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x^2 + 4x \text{ se } x \geqslant -\frac{1}{2} \\ 4x + 3 \text{ se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 9 \text{ se } x \geqslant 2 \\ 4x - 3 \text{ se } x < 2 \end{cases}$

457. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 9x^2 - 12x + 6 \text{ se } x \geqslant 1 \\ -\frac{1}{3x} \text{ se } \frac{1}{3} < x < 1 \\ -9x^2 + 12x \text{ se } x \leqslant \frac{1}{3} \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -3x^2 - 4 \text{ se } x \leqslant -1 \\ \frac{2x - 7}{x - 2} \text{ se } -1 \leqslant x < 1 \\ 3x^2 - 10 \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

458. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 4x + 1 \text{ se } x > 2 \\ 1 - 4x^2 \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^4 + x^2 \text{ se } x < -1 \text{ ou } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x - 2 \text{ se } x > \frac{5}{4} \\ -16x^2 + 24x - 8 \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{4} \\ x^2 - 3x + 3 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

459. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 \text{ se } x \geqslant -1 \\ 2x + 9 \text{ se } x < -1 \end{cases}$

460. a) injetora
b) sobrejetora
c) bijetora
d) não é injetora nem sobrejetora

461. a) injetora
b) bijetora
c) sobrejetora
d) não é injetora nem sobrejetora

462. a) III c) II e) II g) III
b) IV d) I f) III h) II

463. $b = 2$

464. $a = \frac{3}{4}$

465. $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y < 3\}$

466. $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

467. a) III b) II c) I d) II e) II f) II

468. sobrejetora

469. a, b, e, f: falsas; c, d, g: verdadeiras

470. b, d, h: falsas; a, c, e, f, g: verdadeiras

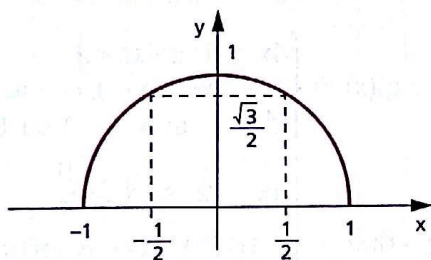
471. a, c: falsas; b, d, e, f: verdadeiras

472. a, c, d: falsas; b, e: verdadeiras

473. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

b) $Im_f = \{y \in B \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

c) Não, porque, por exemplo, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

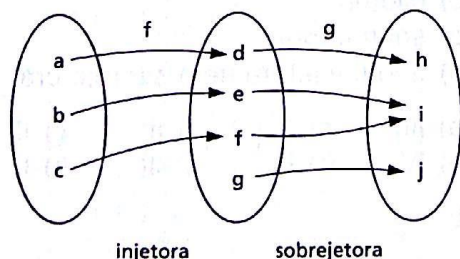
d)

474. a, b, d: falsas; c, e: verdadeiras

478. As funções I_A e I_B são iguais se, e somente se, $A = B$.

479. $m \leqslant n$, $m \geqslant n$, $m = n$

480. 12

481. 6

482.

$g \circ f$ não é injetora nem sobrejetora.

485. 8

486. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$

b) $g^{-1}(x) = \dfrac{3x - 1}{4}$

c) $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

d) $p^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$

e) $q^{-1}(x) = x^3 - 2$

f) $r^{-1}(x) = x^3 + 1$

g) $s^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

487. $f^{-1}(2) = 0$

488. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

489. Não, pois *f* não é injetora; por exemplo: $f(-1) = f(1) = 1$. Portanto *f* não é bijetora.

490. a, c, e: falsas; b, d: verdadeiras

492. a) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

b) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow A$

$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R}_- \rightarrow A$

$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{-x}$

d) $f^{-1}: \mathbb{R}_- \rightarrow A$

$f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{-x}$

e) $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}_-$

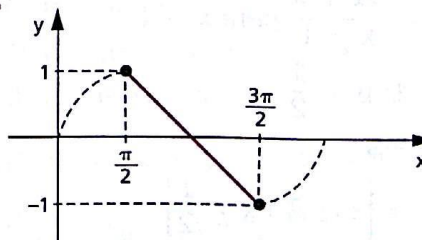
$f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 1}$

f) $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}_+$

$f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$

g) $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}_-$

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1}$

493.

a, d, e: falsas; b, c: verdadeiras

494. b, f: não; a, c, d, e: sim

496. a) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 3}{x - 1}$

b) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3 - x}{x - 2}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 4}{x + 1}$

d) $f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3x - 5}$

e) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}^*$

$f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

f) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 3}$

497. $(f \circ g^{-1})(0) = 8$

498. $a = -1$

500. É o $\sqrt{17}$, pois $f^{-1}(\sqrt{17}) = 3$, isto é, $f(3) = \sqrt{17}$.

502. a) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 1}$

b) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x - 1}$

c) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

d) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = \dfrac{3 + \sqrt{4x + 1}}{2}$

e) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{9 - x}$

f) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{5 - x}$

g) $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1}(x) = \dfrac{5 + \sqrt{8x + 9}}{4}$

504. a)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 3}{2} & \text{se } x \geq 7 \\ \dfrac{x - 1}{3} & \text{se } x < 7 \end{cases}$$

b)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{5 - x}{3} & \text{se } x \leq 8 \\ \dfrac{4 - x}{4} & \text{se } x > 8 \end{cases}$$

c)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

d)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x + 2} & \text{se } x < -3 \\ \dfrac{x - 1}{4} & \text{se } x \geq -3 \end{cases}$$

e)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3 - \sqrt[3]{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geq 3 \\ \dfrac{x + 1}{2} & \text{se } -3 < x < 3 \\ -1 - \sqrt{-x - 3} & \text{se } x \leq -3 \end{cases}$$

505. Não, pois *f* não é injetora, por exemplo: $f(-2) = f(1) = 3$. Portanto *f* não é bijetora.

506. $$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{se } x \geq 7 \\ \dfrac{x + 3}{5} & \text{se } -8 \leq x < 7 \\ \dfrac{x + 5}{3} & \text{se } x < -8 \end{cases}$$

e $f^{-1}(42) = 37$

508. a)

b)

y
x
f
y = x
f⁻¹

e)

y
f
y = x
f⁻¹
x

c)

f
y
y = x
x
f⁻¹

f)

y
y = x
f = f⁻¹
x

g)

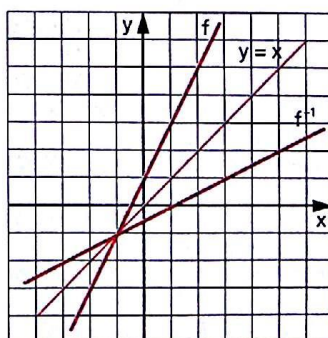
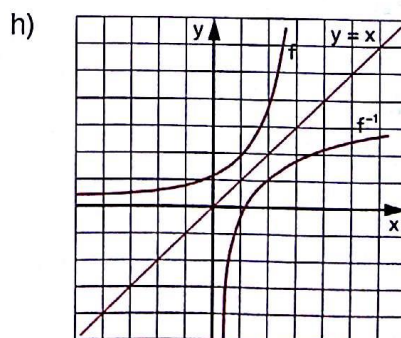
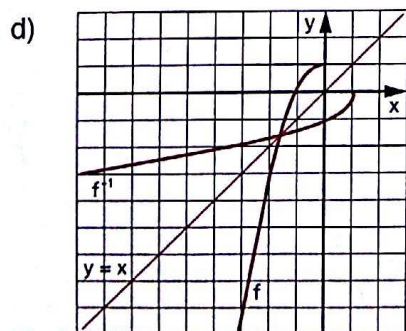
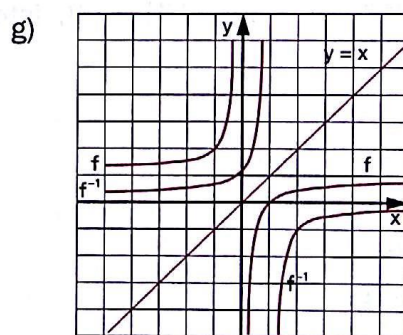
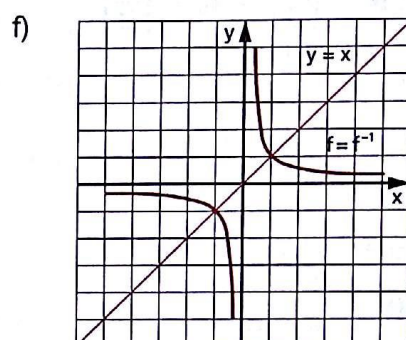
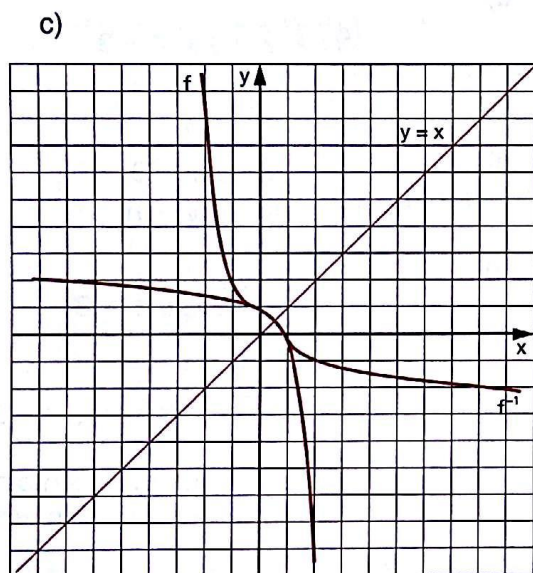
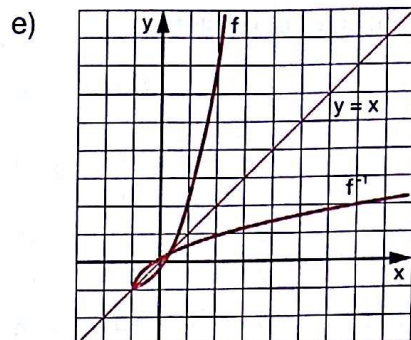
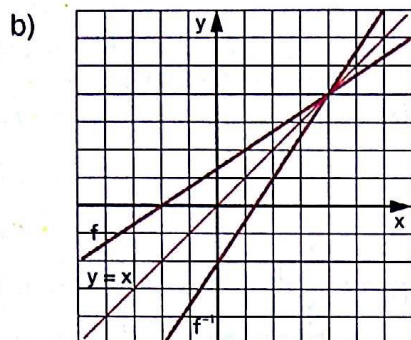
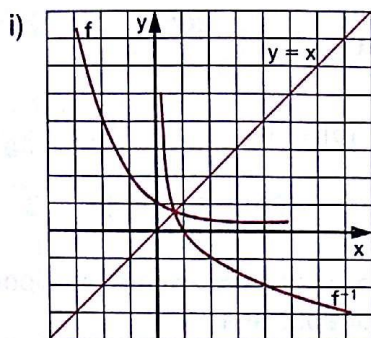
y
y = x
f
f⁻¹
f
x
f⁻¹

d)

y
x
f⁻¹
y = x
f

h)

y
y = x
f
f⁻¹
x

i)

510. a) $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{12}$

b) $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x - 3}{2}}$

c) $(g \circ f)^{-1}: C \to \mathbb{R}_+$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$

d) $(g \circ f)^{-1}: \mathbb{R}_+ \to A$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{3 + \sqrt{x}}{2}$

e) $(g \circ f)^{-1}: C \to A$

$(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

511. Não, pois g não é injetora; por exemplo: $g(-1) = g(1) = 0$; portanto $g \circ f$ não é bijetora.

512. $[h \circ (g \circ f)]^{-1}: B \to A$

$[h \circ (g \circ f)]^{-1}(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{4}$

Apêndice I

514. a) $S = \{6\}$

b) $S = \{-4\}$

c) $S = \{1, 4\}$

d) $S = \left\{\dfrac{7 + \sqrt{33}}{4}, \dfrac{7 - \sqrt{33}}{4}\right\}$

e) $S = \left\{0, \dfrac{7}{3}\right\}$

f) $S = \{77\}$

g) $S = \{13\}$

h) $S = \{3\}$

i) $S = \{3, 4\}$

j) $S = \{4\}$

k) $S = \{0\}$

l) $S = \{1\}$

m) $S = \varnothing$

n) $S = \left\{0, \dfrac{1}{4}\right\}$

o) $S = \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$

p) $S = \{0, 2\}$

515. $S = \{5\}$

516. $x = 2$

517. d, g: falsos; a, b, c, e, f: verdadeiros

518. $S = \varnothing$

520. a) $S = \{4, 9\}$

b) $S = \left\{\dfrac{1}{9}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{4 + 2\sqrt{3}\}$

e) $S = \{1, \sqrt[3]{25}\}$

f) $S = \{1\}$

g) $S = \{16\}$

h) $S = \{81\}$

i) $S = \left\{1, \dfrac{1}{16}\right\}$

j) $S = \left\{1, \dfrac{1}{16}\right\}$

522. a) $S = \left\{-2, \dfrac{1}{3}\right\}$

b) $S = \{5, -1\}$

c) $S = \left\{4, -3, \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2}\right\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \left\{3, -\dfrac{5}{3}\right\}$

523. $S = \{0, 1, 4\}$

525. a) $S = \{64\}$ d) $S = \{34\}$

b) $S = \varnothing$ e) $S = \left\{\frac{177}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$ f) $S = \{40\}$

526. a) $S = \{0, 4\}$ e) $S = \{8\}$

b) $S = \{2\}$ f) $S = \varnothing$

c) $S = \{2, 6\}$ g) $S = \left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$

d) $S = \{1, 17\}$

527. a) $S = \{6\}$ d) $S = \{3\}$

b) $S = \left\{\frac{5}{11}\right\}$ e) $S = \{3a\}$

c) $S = \{4\}$

529. a) $S = \{3\}$ c) $S = \{2\}$

b) $S = \{19\}$ d) $S = \{3\}$

530. a) $S = \{3\}$ d) $S = \{4\}$

b) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ e) $S = \{3\}$

c) $S = \{3, 4\}$

532. a) $S = \{1\}$ c) $S = \{2\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

533. a) $S = \{1\}$ c) $S = \{0\}$

b) $S = \left\{\frac{25}{9}\right\}$

534. $\begin{cases} a < b \Rightarrow S = \{a\} \\ a \geqslant b \Rightarrow S = \{b\} \end{cases}$

535. $S = \left\{\frac{3a}{4}\right\}$

536. $\begin{cases} a = b = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}_+ \\ a \geqslant b > 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{(a-b)^2}{4b}\right\} \\ a < b \text{ ou } b = 0 \Rightarrow S = \varnothing \end{cases}$

537. a) $b \geqslant 1 \Rightarrow S = \left\{\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}\right\}$

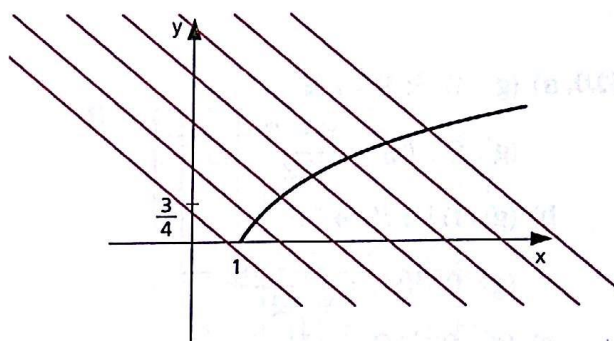
b) $a = b \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \geqslant a\}$

$a \neq b \Rightarrow S = \{a + b\}$

c) $b > a \Rightarrow S = \left\{\frac{2a^2b}{a^2 + b^2}\right\}$

538. $a < 0$ e $|b| \geqslant |a| \rightarrow S = \left\{0, \frac{5a^2 - b^2}{4a}\right\}$

539. $a \geqslant \frac{3}{4}$; $x = \frac{(2a+1) - \sqrt{4a-3}}{2}$

porque a interseção se dá nos pontos de menor abscissa.

540. a) $S = \{(9, 4), (4, 9)\}$

b) $S = \{(10 + 4\sqrt{6}, 10 - 4\sqrt{6})\}$

c) $S = \{(2, 8), (8, 2)\}$

d) $S = \{(9, 4), (4, 9)\}$

541. a) $S = \left\{(4, 2), \left(-\frac{9}{2}, \frac{41}{12}\right)\right\}$

b) $\{(-4, 6)\}$

543. a) $S = \{2\}$

b) $S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

c) $S = \{-16\}$

d) $S = \{4, -3\}$

e) $S = \left\{-\frac{2}{3}, 3\right\}$

f) $S = \{4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}\}$

g) $S = \{0\}$

h) $S = \left\{0, \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right\}$

i) $S = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}$

j) $S = \left\{0, -3, \frac{1}{4}\right\}$

544. $S = \varnothing$

546. $S = \{-2, 7\}$

547. $x^2 = 80$

548. $S = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$

549. $S = \{1, 2, 10\}$

551. a) $S = \{0\}$

b) $S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$

552. $S = \{(8, 64), (64, 8)\}$

Apêndice II

554. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x < 2\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant -1 \text{ ou } 2 \leqslant x < 3\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3} \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2\right\}$

e) $S = \varnothing$

555. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < \frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant -\frac{1}{2} \text{ ou } 3 \leqslant x < 12\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

556. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3 - \sqrt{41}}{16}\right\}$

558. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 11\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{4}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 3\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geqslant 1 + \sqrt{3}\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant \frac{1}{5}\right\}$

g) $S = \varnothing$

559. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 - \sqrt{6}\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 - 2\sqrt{2} \text{ ou } -2 + 2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right\}$

g) $S = \varnothing$

h) $S = \mathbb{R}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < 2\right\}$

561. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{5} \leqslant x < 0 \text{ ou } x > 3\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x < 0 \text{ ou } 3 < x \leqslant 4\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 2\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

563. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x \leq 5\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq \frac{13 + \sqrt{201}}{4}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } 3 \leq x \leq 4\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geq 3 + \sqrt{2}\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

g) $S = \varnothing$

h) $S = \mathbb{R}$

564. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < x \leq 1\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

566. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 11\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}\right\}$

567. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq x < 3\right\}$

568. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{45}{4} < x < 1 \text{ ou } x \geq 9\right\}$

Questões de vestibulares

Lógica

1. (UF-RS) Manuel, Joaquim e Antônio olham, num certo instante, para dois relógios, A e B, que só indicam horas e minutos. Naquele instante, A e B indicam, respectivamente, 11h51min e 11h53min. Diante dessa situação, segue-se o seguinte diálogo entre os amigos:
"Nessas condições, a dedução lógica é que a defasagem entre A e B é de 120 segundos.", exclama Manuel.
"Não! Só podemos garantir que a defasagem entre A e B é de, no máximo, 120 segundos!", contesta Joaquim.
"Vocês dois estão enganados. Com esses dados, só é possível concluir que a defasagem entre A e B é de, pelo menos, 120 segundos!", afirma Antônio.
Sobre as conclusões dos três patrícios, avalie qual das afirmativas a seguir é verdadeira.
I. Só Manuel está certo.
II. Só Joaquim está certo.
III. Só Antônio está certo.
IV. Os três estão certos.
V. Os três estão errados.
VI. Não é possível decidir se algum nem qual dos três está certo.
Justifique sua escolha.

2. (Obmep) Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.
- Adriano diz: "Bruno é uma preguiça".
- Bruno diz: "Carlos é um tamanduá".
- Carlos diz: "Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais".
- Daniel diz: "Adriano é uma preguiça".

Quantos dos amigos são tamanduás?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

3. (Obmep) Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois casais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. É correto afirmar que:
a) Arnaldo é mais velho que Beto e sua esposa é Dalila.
b) Arnaldo é mais velho que sua esposa Dalila.
c) Celina é a mais nova de todos e seu marido é Beto.
d) Dalila é mais velha que Celina e seu marido é Beto.
e) Celina é mais velha que seu marido Arnaldo.

4. (Obmep) Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.
- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?
a) Ari; água b) Bruna; água c) Carlos; suco e) Bruna; suco d) Ari; suco

5. (Obmep) Regina, Paulo e Iracema tentam adivinhar quantas bolas estão dentro de uma caixa fechada. Eles já sabem que este número é maior que 100 e menor que 140. Eles fazem as seguintes afirmações:
- Regina: Na caixa há mais de 100 bolas e menos de 120 bolas.
- Paulo: Na caixa há mais de 105 bolas e menos de 130 bolas.
- Iracema: Na caixa há mais de 120 bolas e menos de 140 bolas.

Sabe-se que apenas uma dessas afirmações é correta.
Quantos são os possíveis valores para o número de bolas dentro da caixa?
a) 1 b) 5 c) 11 d) 13 e) 16

6. (Obmep) A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:
- se colocar ovos, não coloque creme.
- se colocar leite, não coloque laranja.
- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com:
a) ovos e leite, mas sem creme.
b) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
c) ovos e creme, mas sem laranja.
d) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
e) leite e laranja, mas sem creme.

Conjuntos

7. (U.E. Londrina-PR) Um instituto de pesquisas entrevistou 1 000 indivíduos, perguntando sobre sua rejeição aos partidos A e B. Verificou-se que 600 pessoas rejeitavam o partido A; que 500 pessoas rejeitavam o partido B e que 200 não têm rejeição alguma. O número de indivíduos que rejeitam os dois partidos é:
a) 120 pessoas. c) 250 pessoas. e) 800 pessoas.
b) 200 pessoas. d) 300 pessoas.

8. (FEI-SP) Uma escola de línguas oferece somente dois cursos: Inglês e Francês. Sabe-se que ela conta com 500 estudantes e que nenhum deles faz os dois cursos simultaneamente. Destes estudantes, 60% são mulheres e, destas, 10% cursam Francês. Sabe-se que 30% dos estudantes homens também cursam Francês. Neste caso, o número de estudantes homens que cursam Inglês é:

a) 60 b) 410 c) 140 d) 320 e) 270

9. (UFF-RJ) Foram enviadas para dois testes em um laboratório 150 caixas de leite de uma determinada marca. No teste de qualidade, 40 caixas foram reprovadas por conterem elevada taxa de concentração de formol. No teste de medida, 60 caixas foram reprovadas por terem volume inferior a 1 litro. Sabendo-se que apenas 65 caixas foram aprovadas nos dois testes, pode-se concluir que o número de caixas que foram reprovadas em ambos os testes é igual a:

a) 15 b) 20 c) 35 d) 85 e) 100

10. (ESPM-SP) Numa empresa multinacional, sabe-se que 60% dos funcionários falam inglês, 45% falam espanhol e 30% deles não falam nenhuma daquelas línguas. Se exatamente 49 funcionários falam inglês e espanhol, podemos concluir que o número de funcionários dessa empresa é igual a:

a) 180 b) 140 c) 210 d) 165 e) 127

11. (PUC-PR) Com o objetivo de melhorar a produtividade das lavouras, um grupo de 600 produtores de uma determinada região resolveu investir no aumento da produção de alimentos nos próximos anos: 350 deles investiram em avanços na área de biotecnologia; 210 em uso correto de produtos para a proteção de plantas e 90 em ambos (avanços na área de biotecnologia e uso correto de produtos para a proteção de plantas). Com base nas informações acima, considere as seguintes afirmativas:

I. 260 produtores investiram apenas em avanços na área de biotecnologia.
II. 120 produtores investiram apenas em uso correto de produtos para a proteção de plantas.
III. 470 produtores investiram em avanços na área de biotecnologia ou uso correto de produtos para a proteção de plantas.
IV. 130 produtores não fizeram nenhum dos dois investimentos.

Está(ão) CORRETA(S) a(s) afirmativa(s):

a) I, II e III, apenas. c) I e II, apenas. e) I e III, apenas.
b) II e IV, apenas. d) I, II, III e IV.

12. (UFF-RJ) Dentre as espécies ameaçadas de extinção na fauna brasileira, há algumas que vivem somente na Mata Atlântica, outras que vivem somente fora da Mata Atlântica e, há ainda, aquelas que vivem tanto na Mata Atlântica como fora dela. Em 2003, a revista *Terra* publicou alguns dados sobre espécies em extinção na fauna brasileira: havia 160 espécies de aves, 16 de anfíbios, 20 de répteis e 69 de mamíferos, todas ameaçadas de extinção. Dessas espécies, 175 viviam somente na Mata Atlântica e 75 viviam somente fora da Mata Atlântica. Conclui-se que, em 2003, o número de espécies ameaçadas de extinção na fauna brasileira, citadas pela revista *Terra*, que viviam tanto na Mata Atlântica como fora dela, corresponde a:

a) 0 b) 5 c) 10 d) 15 e) 20

13. (UF-CE) Dos 1 150 alunos de uma escola, 654 gostam de português, 564 gostam de matemática e 176 não gostam de português nem de matemática. Sendo assim, a quantidade de alunos que gostam de português e de matemática é:
a) 300 b) 250 c) 244 d) 201 e) 122

14. (UE-CE) Em uma turma de 50 alunos, 30 gostam de azul, 10 gostam igualmente de azul e amarelo, 5 não gostam de azul nem de amarelo. Os alunos que gostam de amarelo são:
a) 25 b) 20 c) 18 d) 15 e) 10

15. (FEI-SP) Uma pesquisa realizada com 800 adolescentes a respeito da utilização de dois aparelhos eletrônicos revelou que 220 utilizam o aparelho A, 380 utilizam o aparelho B e 120 utilizam os dois. Nestas condições, pode-se afirmar que, do total de entrevistados, X adolescentes não utilizam qualquer um dos dois aparelhos. Dessa forma:
a) $X = 80$ b) $X = 320$ c) $X = 100$ d) $X = 720$ e) $X = 480$

16. (PUC-MG) Em um grupo de 60 pessoas residentes em certo município, há 28 que trabalham por conta própria, 26 que trabalham com carteira assinada e 15 que têm esses dois tipos de trabalho. O número de pessoas desse grupo que não trabalham por conta própria e nem trabalham com carteira assinada é:
a) 21 b) 23 c) 25 d) 27

17. (UF-RN) Num grupo de amigos quatorze pessoas estudam Espanhol e oito estudam Inglês, sendo que três dessas pessoas estudam ambas as línguas. Sabendo que todos do grupo estudam pelo menos uma dessas línguas, o total de pessoas do grupo é
a) 17. b) 19. c) 22. d) 25.

18. (U.F. São Carlos-SP) Um levantamento realizado pelo departamento de Recursos Humanos de uma empresa mostrou que 18% dos seus funcionários são fumantes. Sabendo-se que 20% dos homens e 15% das mulheres que trabalham nessa empresa fumam, pode-se concluir que, do total de funcionários dessa empresa, os funcionários do sexo masculino representam
a) 30%. b) 35%. c) 40%. d) 45%. e) 60%.

19. (UF-PE) Os 200 estudantes de uma escola que praticam esportes escolhem duas dentre as modalidades seguintes: futebol, handebol, basquete e futebol de salão. Entretanto, nenhum estudante da escola escolheu futebol e basquete ou handebol e futebol de salão. Sabendo que 65% dos alunos escolheram futebol, 60% escolheram futebol de salão, 35% escolheram basquete e 25% dos jogadores de handebol também jogam basquete, quantos são os alunos da escola que jogam futebol e futebol de salão?

20. (U.E. Londrina-PR) Um grupo de estudantes resolveu fazer uma pesquisa sobre as preferências dos alunos quanto ao cardápio do Restaurante Universitário. Nove alunos optaram somente por carne de frango, 3 somente por peixes, 7 por carne bovina e frango, 9 por peixe e carne bovina e 4 pelos três tipos de carne. Considerando que 20 alunos manifestaram-se vegetarianos, 36 não optaram por carne bovina e 42 não optaram por peixe, assinale a alternativa que apresenta o número de alunos entrevistados.
a) 38 b) 42 c) 58 d) 62 e) 78

21. (UF-RN) Uma escola de ensino médio tem 3600 estudantes, assim distribuídos:
• 1200 cursam o 1º ano, 1200 cursam o 2º ano, e 1200 cursam o 3º ano;

• de cada série, metade dos estudantes é do sexo masculino e metade do sexo feminino;
• de cada sexo, metade dos estudantes estuda Inglês e metade estuda Francês.

Considere que, em cada série, a quantidade de alunos de Inglês e de Francês é a mesma. O número de estudantes dessa escola que estão cursando o 3º ano ou que não estudam Francês é:

a) 3000 b) 600 c) 1200 d) 2400

22. (Udesc-SC) **O que os brasileiros andam lendo?**

O brasileiro lê, em média, 4,7 livros por ano. Este é um dos principais resultados da pesquisa *Retratos da Leitura no Brasil*, encomendada pelo Instituto Pró-Livro ao Ibope Inteligência, que também pesquisou o comportamento do leitor brasileiro, as preferências e as motivações dos leitores, bem como os canais e a forma de acesso aos livros.

Fonte: Associação Brasileira de Encadernação e Restauro, adapt.

Supõe-se que em uma pesquisa envolvendo 660 pessoas, cujo objetivo era verificar o que elas estão lendo, obtiveram-se os seguintes resultados: 100 pessoas leem somente revistas, 300 pessoas leem somente livros e 150 pessoas leem somente jornais. Supõe-se ainda que, dessas 660 pessoas, 80 leem livros e revistas, 50 leem jornais e revistas, 60 leem livros e jornais e 40 leem revistas, jornais e livros. Em relação ao resultado dessa pesquisa, são feitas as seguintes afirmações:

I. Apenas 40 pessoas leem pelo menos um dos três meios de comunicação citados.
II. Quarenta pessoas leem somente revistas e livros, e não leem jornais.
III. Apenas 440 pessoas leem revistas ou livros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa II é verdadeira.
e) Somente a afirmativa I é verdadeira.

23. (FEI-SP) Em uma comunidade, uma pesquisa a respeito do consumo dos produtos de limpeza A, B e C revelou que 10 consomem os três, 20 consomem os produtos A e C, 40 os produtos B e C, 30 os produtos A e B, 120 o produto C, 160 o produto B, 90 o produto A e 50 não consomem qualquer um dos três produtos. Das pessoas dessa comunidade, X não consomem o produto A. Neste caso:

a) X = 250 b) X = 370 c) X = 180 d) X = 200 e) X = 330

24. (UF-PA) Feita uma pesquisa entre 100 alunos, do ensino médio, acerca das disciplinas português, geografia e história, constatou-se que 65 gostam de português, 60 gostam de geografia, 50 gostam de história, 35 gostam de português e geografia, 30 gostam de geografia e história, 20 gostam de história e português e 10 gostam dessas três disciplinas. O número de alunos que não gosta de nenhuma dessas disciplinas é:

a) 0 b) 5 c) 10 d) 15 e) 20

25. (U.E. Londrina-PR) Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela A no canal A, a novela B no canal B e a novela C no canal C. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. A tabela a seguir indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

Novelas	Número de espectadores
A	1450
B	1150
C	900
A e B	350
A e C	400
B e C	300
A, B e C	100

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?
a) 300 telespectadores.
b) 370 telespectadores.
c) 450 telespectadores.
d) 470 telespectadores.
e) 500 telespectadores.

26. (UF-PA) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus *n* alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:
- 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;
- 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;
- 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;
- 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;
- 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente, $A \cap B = \varnothing$. Concluímos que o número *n* de alunos desta turma é
a) 49. b) 50. c) 47. d) 45. e) 46.

27. (UF-PI) O diretor de uma tradicional escola da cidade de Teresina resolveu fazer uma pesquisa de opinião junto aos seus 590 alunos do Ensino Médio sobre as políticas públicas de acesso ao Ensino Superior. No questionário, perguntava-se sobre a aprovação de: Cotas, Bolsas e Enem, como modelo de exame vestibular. As respostas dos alunos foram sintetizadas na tabela abaixo:

Política pública	Cotas	Bolsas	Enem	Cotas e Bolsas	Bolsas e Enem	Cotas e Enem	Cotas, Bolsas e Enem
Número de aprovações	226	147	418	53	85	116	44

Sobre a pesquisa e a tabela anterior, é correto afirmar que
a) a quantidade de alunos que não opinaram por nenhuma das três políticas é 12.
b) a quantidade de alunos que aprovam apenas uma política pública é 415.
c) a quantidade de alunos que aprovam mais de uma política é 167.
d) a quantidade de alunos que aprovam as três políticas é 45.
e) há mais alunos que aprovam cotas do que alunos que aprovam somente o Enem.

28. (UF-ES) Existem, nas cidades brasileiras, 18 milhões de pessoas sem abastecimento público de água potável, 93 milhões sem redes de esgotos sanitários e 14 milhões sem coleta de lixo. Admita que 103 milhões dessas pessoas carecem de pelo menos um des-

ses serviços públicos básicos e que 6 milhões não usufruem de nenhum desses serviços. O número de pessoas, em milhões, que usufruem exatamente um desses serviços é:
a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

29. (UF-PE) Das companhias que publicam anúncios nos jornais C, D ou F, sabemos que:
- 30 publicam no C,
- 25 publicam no D,
- 30 publicam no F,
- 10 publicam em C e D,
- 9 publicam em F e D,
- 11 publicam em C e F, e
- 6 publicam em C, D e F.

Considerando estas informações, analise as sentenças a seguir.
0-0) Onze companhias publicam anúncios em exatamente dois dos jornais.
1-1) Dezoito companhias publicam anúncios em pelo menos dois dos jornais.
2-2) Quarenta e três companhias publicam anúncios em um único jornal.
3-3) Sessenta e uma companhias publicam anúncios em pelo menos um dos três jornais.
4-4) Treze companhias publicam anúncios apenas no jornal D.

30. (UF-ES) Em um grupo de 93 torcedores,
- todos torcem pelo Flamengo, pelo Cruzeiro ou pelo Palmeiras;
- ninguém torce pelo Flamengo e pelo Cruzeiro ao mesmo tempo;
- exatamente 12 desses torcedores torcem por dois dos três times;
- o número de torcedores que torcem apenas pelo Flamengo é o dobro do número de torcedores que torcem pelo Palmeiras;
- pelo menos 4 torcedores torcem apenas pelo Cruzeiro.

Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que o número máximo possível de torcedores do Palmeiras no grupo é:
a) 27 b) 29 c) 31 d) 33 e) 35

31. (UF-PE) Em uma pesquisa com os 60 alunos de uma turma do ensino médio sobre a preferência deles com respeito às disciplinas Matemática, Física e Química, foi constatado que:
- 14 alunos gostam de exatamente duas das três disciplinas;
- 20 alunos gostam das três disciplinas;
- 10 alunos não gostam de nenhuma das três disciplinas.

Quantos alunos gostam de exatamente uma das três disciplinas?
a) 18 b) 17 c) 16 d) 15 e) 14

32. (PUC-MG) Certa rede comercial fez uma pesquisa para saber quais os tipos de calçado mais usados pela população da cidade em que pretendia instalar uma nova loja. Das pessoas ouvidas, um terço usa mais sandália, um quarto usa mais tênis, um quinto usa mais sapato e as 65 restantes usam mais outros tipos de calçado. Com base nesses dados, pode-se afirmar que o número de pessoas ouvidas nessa pesquisa foi:
a) 240 b) 300 c) 360 d) 420

33. (U.F. Uberlândia-MG) De uma escola de Uberlândia, partiu uma excursão para Caldas Novas com 40 alunos. Ao chegar em Caldas Novas, 2 alunos adoeceram e não frequentaram as piscinas. Todos os demais alunos frequentaram as piscinas, sendo 20 pela manhã e à tarde, 12 somente pela manhã, 3 somente à noite e 8 pela manhã, à tarde e

à noite. Se ninguém frequentou as piscinas somente no período da tarde, quantos alunos frequentaram as piscinas à noite?

a) 16 b) 12 c) 14 d) 18

34. (UF-PE) Os alunos de uma turma cursam alguma(s) dentre as disciplinas Matemática, Física e Química. Sabendo que:

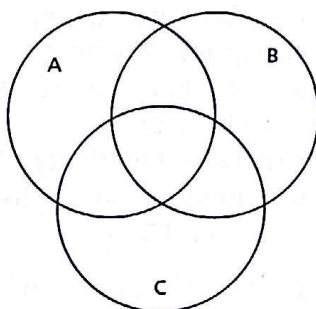
- o número de alunos que cursam Matemática e Física excede em 5 o número de alunos que cursam as três disciplinas;
- existem 7 alunos que cursam Matemática e Química, mas não cursam Física;
- existem 6 alunos que cursam Física e Química, mas não cursam Matemática;
- o número de alunos que cursam exatamente uma das disciplinas é 150;
- o número de alunos que cursam pelo menos uma das três disciplinas é 190.

Quantos alunos cursam as três disciplinas?

35. (Unicamp-SP) Três candidatos, A, B e C, concorrem à presidência de um clube. Uma pesquisa apontou que, dos sócios entrevistados, 150 não pretendem votar. Dentre os entrevistados que estão dispostos a participar da eleição, 40 sócios votariam apenas no candidato A, 70 votariam apenas em B e 100 votariam apenas no candidato C. Além disso, 190 disseram que não votariam em A, 110 disseram que não votariam em C e 10 sócios estão na dúvida e podem votar tanto em A como em C, mas não em B. Finalmente, a pesquisa revelou que 10 entrevistados votariam em qualquer candidato. Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Quantos sócios entrevistados estão em dúvida entre votar em B ou em C, mas não votariam em A? Dentre os sócios consultados que pretendem participar da eleição, quantos não votariam em B?

b) Quantos sócios participaram da pesquisa? Suponha que a pesquisa represente fielmente as intenções de voto de todos os sócios do clube. Escolhendo um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele vá participar da eleição mas ainda não tenha se decidido por um único candidato?

(Sugestão: utilize o diagrama de Venn fornecido abaixo.)

36. (FGV-SP) Uma pesquisa de mercado sobre determinado eletrodoméstico mostrou que 37% dos entrevistados preferem a marca X, 40% preferem a marca Y, 30% preferem a marca Z, 25% preferem X e Y, 8% preferem Y e Z, 3% preferem X e Z e 1% prefere as três marcas. Considerando que há os que não preferem nenhuma das três marcas, a porcentagem dos que não preferem nem X nem Y é:

a) 20% b) 23% c) 30% d) 42% e) 48%

37. (UF-MG) Uma escola realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus alunos. Alguns resultados dessa pesquisa foram:

- 82% do total de entrevistados gostam de chocolate;
- 78% do total de entrevistados gostam de pizza; e
- 75% do total de entrevistados gostam de batata frita.

Então, é CORRETO afirmar que, no total de alunos entrevistados, a porcentagem dos que gostam, ao mesmo tempo, de chocolate, de pizza e de batata frita é, **pelo menos**, de

a) 25%. b) 30%. c) 35%. d) 40%.

38. (UF-PI) Sejam A e B dois subconjuntos quaisquer de números reais. Sobre as afirmações abaixo,

I. Se $A \cap B = \varnothing$, então $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$;
II. Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$;
III. Se $x \in (A \cup B)^C$, então $x \in A^C$ e $x \in B^C$;

é correto afirmar que:

a) somente I é verdadeira.
b) somente I e II são verdadeiras.
c) somente II é verdadeira.
d) somente II e III são verdadeiras.
e) todas as afirmações são verdadeiras.

39. (ITA-SP) Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não vazios, tais que $(A - B) \cup (B - A) = A$.

40. (ITA-SP) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

a) $2^8 - 9$. b) $2^8 - 1$. c) $2^8 - 2^6$. d) $2^{14} - 2^8$. e) 2^8.

41. (ITA-SP) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

a) um único valor.
b) apenas dois valores distintos.
c) apenas três valores distintos.
d) apenas quatro valores distintos.
e) mais do que quatro valores distintos.

42. (ITA-SP) Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A - B^C) - C^C = A \cap (B \cup C)$;
II. $(A - B^C) - C = A \cup (B \cap C^C)^C$;
III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) III. d) I e III. e) II e III.

43. (ITA-SP) Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C - B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 8.

44. (ITA-SP) Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.
II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
III. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e III.
e) nenhuma.

45. (ITA-SP) Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geqslant 1$. Seja S um subconjunto de $\mathcal{P}(U)$ com a seguinte propriedade:
Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.
Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

a) 2^{n-1}
b) $\frac{n}{2}$, se n for par, e $\frac{(n+1)}{2}$ se n for ímpar
c) $n + 1$
d) $2^{n-1} + 1$
e) 2^{n-1}

46. (ITA-SP) Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C: C \subset B - A\}) = 128$.
Então, das afirmações abaixo:

I. $n(B) - n(A)$ é único;
II. $n(B) + n(A) \leqslant 128$;
III. a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única;

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) apenas I e II.
e) nenhuma.

47. (ITA-SP) Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \varnothing$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a:

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$
c) $\{1, 3, 7, 8\}$
d) $\{1, 3\}$
e) $\{7, 8\}$

Conjuntos numéricos

48. (UF-BA) Sobre números reais, é correto afirmar:

(01) O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.
(02) O produto de qualquer número inteiro não nulo por um número irracional qualquer é um número irracional.
(04) O quadrado de qualquer número irracional é um número irracional.
(08) Se o quadrado de um número natural é par, então esse número também é par.
(16) Todo múltiplo de 17 é um número ímpar ou múltiplo de 34.
(32) A soma de dois números primos quaisquer é um número primo.
(64) Se o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos é igual a 1, então esses números são primos.

49. (UF-AM) Considere as seguintes afirmações:

I. Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 também é ímpar;
II. A soma de dois números inteiros ímpares é sempre um número inteiro ímpar;
III. Nem todo número primo é ímpar;
IV. Todo número inteiro par pode ser escrito na forma $n^2 + 2$, com n inteiro;
V. Todo número inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n - 9$, com n inteiro.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmativas I, III e IV estão corretas.
b) Somente as afirmativas I, III e V estão corretas.
c) Somente as afirmativas II, IV e V estão incorretas.
d) Somente as afirmativas II, III e V estão incorretas.
e) Todas as afirmativas estão corretas.

50. (PUC-SP) Se *a*, *b* e *c* são números inteiros tais que $c^a = b^{2a}$, $3c = 3 \cdot 9^a$ e $a + b + c = 16$, então é verdade que

a) $a < b < c$
c) $b < a < c$
e) $c < a < b$
b) $a < c < b$
d) $b < c < a$

51. (UF-BA) Sobre números reais, é correto afirmar:

(01) Se *m* é um inteiro divisível por 3 e *n* é um inteiro divisível por 5, então $m + n$ é divisível por 15.
(02) O quadrado de um inteiro divisível por 7 é também divisível por 7.
(04) Se o resto da divisão de um inteiro *n* por 3 é ímpar, então *n* é ímpar.
(08) Se *x* e *y* são números reais positivos, então existe um número natural *n* tal que $n > \frac{y}{x}$.
(16) Se *x* é um número real positivo, então $x^2 > x$.
(32) O produto de dois números irracionais distintos é um número irracional.

52. (ITA-SP) Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;
II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;
III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,
é (são) sempre verdadeira(s)

a) apenas I.
c) apenas III.
e) I, II e III.
b) apenas II.
d) apenas I e II.

53. (U.F. Lavras-MG) Os computadores trabalham com números na base 2 por uma série de fatores. Nessa base, os resultados da soma e do produto (1100101) + (110101) e (101) · (111) são, respectivamente,

a) (11111110), (11101)
d) (10011010), (100011)
b) (1000011), (100001)
e) (11100011), (111000)
c) (10101010), (101010)

54. (Fuvest-SP) Um número natural N tem três algarismos. Quando dele subtraímos 396 resulta o número que é obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de N. Se, além disso, a soma do algarismo das centenas e do algarismo das unidades de N é igual a 8, então o algarismo das centenas de N é

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

55. (PUC-MG) A soma dos algarismos de um número natural *n*, $10^3 < n < 10^4$, é 21. Além disso, seu algarismo das centenas é igual à soma do algarismo das unidades com o algarismo das unidades de milhar. Com base nessas informações, examine cada uma das três afirmativas a seguir:

I. O número *n* é um múltiplo de 3.
II. Pelo menos um algarismo de *n* é ímpar.
III. O algarismo das dezenas de *n* é par.
O número de afirmativas verdadeiras é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

56. (UF-CE) Os números naturais $p = 2^{31} - 1$ e $q = 2^{61} - 1$ são primos. Então, o número de divisores de 2pq é igual a:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

57. (UF-MT) Sobre o número natural $n = 2^{40} - 1$, considere as seguintes afirmativas:

I. n é um múltiplo de 31.
II. n é um múltiplo de 5.
III. n é um número primo.
IV. n é um número par.

Estão corretas as afirmativas

a) III e IV. b) II e III. c) II e IV. d) I e II. e) I e III.

58. (Fatec-SP) O número inteiro $N = 16^{15} + 2^{56}$ é divisível por

a) 5. b) 7. c) 11. d) 13. e) 17.

59. (UF-PI) Seja $K \subset \mathbb{N}$ um subconjunto dos números naturais positivos cujos elementos são quadrados perfeitos, ou seja, $K = \{a = b^2;\ b \in \mathbb{N}^*\}$. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

1. ( ) Se $x, y \in K$, então $x + y \in K$.
2. ( ) Se $x, y \in K$, então $xy \in K$.
3. ( ) Se $x, y \in K$, então m.d.c $(x, y) \in K$.
4. ( ) Se $x \in K$, então para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n \in K$.

60. (FGV-SP) Considere as frações $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{p}$, com n e p sendo números irracionais. Sobre o resultado da soma $\frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ afirma-se que pode ser:

I. inteiro não nulo;
II. racional não inteiro;
III. irracional;
IV. zero;
V. imaginário puro.

É correto apenas o que está contido em

a) I e II.
b) II e IV.
c) I, II e III.
d) I, II, III e IV.
e) II, III, IV e V.

61. (UE-CE) Seja n um número natural, que possui exatamente três divisores positivos, e seja X o conjunto de todos os divisores positivos de n^3. O número de elementos do conjunto das partes de X é:

a) 64 b) 128 c) 256 d) 512

62. (UF-BA) Sobre números reais, é correto afirmar:

(01) Se a é o maior número de três algarismos divisível por 7, então a soma de seus algarismos é igual a 22.
(02) Se a é um múltiplo de 3, e b é um múltiplo de 4, então $a \cdot b$ é múltiplo de 6.
(04) Se $c = a + b$ e b é divisor de a, então c é múltiplo de a.
(08) Se a e b são números reais tais que $|a| \leqslant b$, então b é positivo.
(16) Para quaisquer números reais a e b, $|a - b| \leqslant |a + b|$.
(32) Dados quaisquer números reais a, b e c, se $a \leqslant b$, então $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

63. (FGV-SP) Deslocando-se a vírgula 4 posições para a direita na representação decimal de um número racional positivo, o número obtido é o quádruplo do inverso do número original. É correto afirmar que o número original encontra-se no intervalo real

a) $\left[\frac{1}{10000}, \frac{3}{10000}\right]$
b) $\left[\frac{1}{1000}, \frac{3}{1000}\right]$
c) $\left[\frac{1}{100}, \frac{3}{100}\right]$
d) $\left[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right]$
e) $[1, 3]$

64. (UFF-RJ) Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), "Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem". Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.
d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

65. (UF-CE) Seja $A = \{x \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant x \leqslant 10^{12}\}$, em que $\mathbb{N}$ indica o conjunto dos números naturais. O número de elementos de A que não são quadrados perfeitos ou cubos perfeitos é igual a:

a) 10^6.
b) $10^{12} - 10^6 - 10^4 + 10^2$.
c) $10^{12} - 10^6 + 10^4 - 10^2$.
d) $10^{12} + 10^6 + 10^4 + 10^2$.
e) $10^6 + 10^4 + 10^2$.

66. (UF-GO) Ao deparar-se com a expressão $\dfrac{3410}{2+\sqrt{2}}$ e não dispondo de uma calculadora, um estudante substituiu $\sqrt{2}$ por 1,41 e efetuou a divisão, obtendo uma aproximação para a expressão. Um segundo estudante, antes de efetuar a divisão, racionalizou a expressão, eliminando o radical do denominador. Depois, também substituiu $\sqrt{2}$ por 1,41 e efetuou as operações, obtendo, para sua surpresa, uma aproximação diferente para a mesma expressão. Considerando o exposto, indique por A a aproximação obtida pelo primeiro estudante, por B a obtida pelo segundo e por C o valor exato da expressão que os estudantes não tinham como calcular. Considerando que $1{,}41 < \sqrt{2}$, coloque A, B e C em ordem crescente, sendo A e B números racionais e C um número irracional, e justifique matematicamente qual dos dois estudantes obteve o valor mais próximo do valor exato da expressão.

67. (Unifesp-SP) O conhecido quebra-cabeça "Leitor Virtual de Pensamentos" baseia-se no seguinte fato: se $x \neq 0$ é o algarismo das dezenas e y é o algarismo das unidades do número inteiro positivo "xy", então o número z = "xy" − (x + y) é sempre múltiplo de 9.

a) Verifique a veracidade da afirmação para os números 71 e 30.
b) Prove que a afirmativa é verdadeira para qualquer número inteiro positivo de dois algarismos.

68. (UF-CE) Os inteiros não todos nulos m, n, p, q são tais que $45^m \cdot 60^n \cdot 75^p \cdot 90^q = 1$. Pede-se:

a) dar exemplo de um tal quaterno (m, n, p, q).
b) encontrar todos os quaternos (m, n, p, q) como acima, tais que $m + n + p + q = 8$.

69. (UF-CE) A soma de todos os números naturais x que satisfazem a dupla desigualdade $3 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 21$ é:

a) 79 542
b) 86 405
c) 93 100
d) 97 425

70. (UFF-RJ) O nanômetro é a unidade de medida de comprimento usada em nanotecnologia ("nano" vem do grego e significa "anão"). Sabe-se que um metro equivale a um bilhão de nanômetros. Considerando o diâmetro da Terra com 13 000 quilômetros, conclui-se que a medida do diâmetro da Terra, em nanômetro, é igual

a) $1{,}3 \times 10^{16}$
b) $1{,}3 \times 10^{-16}$
c) $1{,}3 \times 10^{-9}$
d) $1{,}3 \times 10^{9}$
e) $1{,}3 \times 10^{4}$

71. (U.F. São Carlos-SP) A divisão de 186 por um número natural *b*, com $b \neq 0$, produz quociente 8 e resto *r* $(0 \leq r < b)$. Nessas condições, *b* pode assumir

a) 2 valores.
b) 3 valores.
c) 4 valores.
d) 5 valores.
e) 6 valores.

72. (FGV-SP) O produto de 3 números inteiros positivos e consecutivos é igual a 8 vezes a sua soma. A soma dos quadrados desses 3 números é igual a:

a) 77. b) 110. c) 149. d) 194. e) 245.

73. (FGV-SP) Se a soma e o produto de dois números são iguais a 1, a soma dos cubos desses números é igual a

a) -2. b) 0. c) 2. d) $-2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ e) $-\frac{3\sqrt{3}}{4}i$

74. (UF-MA) Quantos números inteiros pertencem ao intervalo $\left[-\sqrt{10}, \sqrt{15}\right]$?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) Nenhum

75. (PUC-SP) Suponha que no século XVI, $(n - 23)$ anos antes do ano n^2, Leonardo da Vinci pintou o famoso quadro *Mona Lisa*. Se Leonardo nasceu em 1452 e morreu em 1519, então quantos anos ele tinha ao pintar esse quadro?

a) 59 b) 56 c) 55 d) 53 e) 51

76. (FGV-SP) Chamaremos de S(n) a soma dos algarismos do número inteiro positivo *n*, e de P(n) o produto dos algarismos de *n*. Por exemplo, se $n = 47$, então $S(47) = 11$ e $P(47) = 28$. Se *n* é um número inteiro positivo de dois algarismos tal que $n = S(n) + P(n)$, então, o algarismo das unidades de *n* é

a) 1. b) 2. c) 3. d) 6. e) 9.

77. (Unesp-SP) O número de quatro algarismos 77XY, onde X é o dígito das dezenas e Y o das unidades, é divisível por 91. Determine os valores dos dígitos X e Y.

78. (Fatec-SP) Sejam *x* e *y* números inteiros não nulos tais que $E = \frac{7 \cdot x^3}{y}$. Se os valores de *x* e *y* dobram, então o valor de E

a) não se altera.
b) fica dividido por 2.
c) fica dividido por 4.
d) fica multiplicado por 2.
e) fica multiplicado por 4.

79. (FGV-SP)

a) Determine todos os números naturais que satisfazem simultaneamente as inequações:

$10^{-1}x \geq 0{,}06$ e $10^{-1}x \leq 0{,}425$

b) Os sistemas de inequações são úteis para resolver antigos problemas como este, aproximadamente, do ano 250:

Três estudantes receberam cada um uma mesma lista de palavras sinônimas que deveriam ser escolhidas em pares. Cada palavra tinha uma única palavra sinônima correspondente. Dentro do tempo permitido, o primeiro colocado conseguiu 21 pares corretos; o segundo colocado tinha dois terços dos pares corretos e o terceiro, quatro a mais do que a metade do número de pares corretos. Qual era o total de pares corretos de palavras sinônimas?

80. (UF-PE) Se o preço de um produto é aumentado de 25%, em seguida diminuído de 25%, aumentado novamente de 25% e novamente diminuído de 25%, podemos afirmar que o preço atual, em comparação com o preço de antes do primeiro aumento:

a) decresceu mais de 12%.
b) decresceu menos de 12%.
c) cresceu de 12%.
d) não variou.
e) cresceu de 13%.

81. (FEI-SP) Em uma década, a população de uma cidade aumentou 15%. Na década seguinte, a população da mesma cidade aumentou 20%, totalizando 96 600 habitantes. A população da cidade no final da década anterior a essas duas décadas era de:

a) 75 000 habitantes.
b) 80 000 habitantes.
c) 85 000 habitantes.
d) 82 000 habitantes.
e) 70 000 habitantes.

82. (UF-PI) Aumentar o preço de um produto em 15% e, em seguida, conceder um desconto de 10% equivale a

a) permanecer com o preço original.
b) ter um prejuízo de 1% em relação ao preço original.
c) ter um ganho de 3,5% em relação ao preço original.
d) ter um prejuízo de 5% em relação ao preço original.
e) ter um ganho de 7% em relação ao preço original.

83. (FEI-SP) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 7\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$. Considere o conjunto $D = B - (A \cap C)$. A quantidade de elementos de D é um número:

a) múltiplo de 5.
b) divisível por 3.
c) maior do que 10.
d) menor do que 4.
e) ímpar.

84. (UF-RS) O quadrado do número $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ é

a) 4. b) 5. c) 6. d) 7. e) 8.

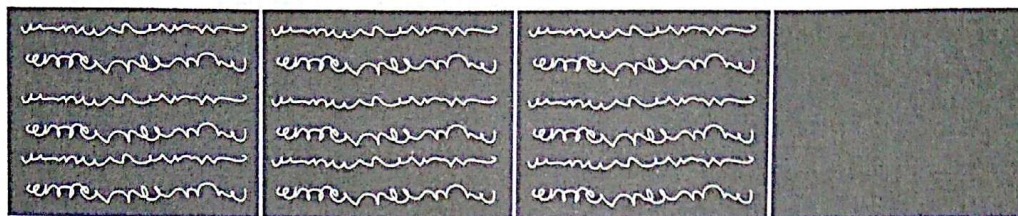
85. (UF-RJ) Se $x = \sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}$, mostre que x é inteiro e negativo. (Sugestão: calcule x^2.)

86. (UF-PE) Antônio nasceu no século vinte, e seu pai, que tinha 30 anos quando Antônio nasceu, tinha x anos no ano x^2. Considerando estas informações, analise as afirmações seguintes:

0-0) O pai de Antônio nasceu no século vinte.
1-1) O pai de Antônio nasceu em 1936.
2-2) O pai de Antônio tinha 44 anos em 1936.
3-3) Antônio nasceu em 1922.
4-4) Antônio nasceu em 1936.

87. (UF-PR) Sabe-se que a velocidade do som no ar depende da temperatura. Uma equação que relaciona essa velocidade v (em metros por segundo) com a temperatura t (em graus Celsius) de maneira aproximada é $v = 20\sqrt{t+273}$. Com base nessas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de 27 °C? (Sugestão: use $\sqrt{3} = 1,73$.)
b) Costuma-se assumir que a velocidade do som é de 340 m/s (metros por segundo). Isso ocorre a que temperatura, em graus Celsius?

88. (Enem-MEC) Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é

a)

b)

c)

d)

e)

89. (Enem-MEC) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

semibreve	𝅝	1
mínima	𝅗𝅥	$\frac{1}{2}$
semínima	♩	$\frac{1}{4}$
colcheia	♪	$\frac{1}{8}$
semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	$\frac{1}{16}$
fusa	𝅘𝅥𝅰	$\frac{1}{32}$
semifusa	𝅘𝅥𝅱	$\frac{1}{64}$

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.
Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com:

a) 24 fusas.
b) 3 semínimas.
c) 8 semínimas.
d) 24 colcheias e 12 semínimas.
e) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

90. (PUC-MG) A tabela representa o gasto semanal com alimentação de um grupo de 10 famílias:

Número de famílias	5	3	2
Gasto por família (em reais)	126,00	*m*	342,00

Se o gasto semanal médio por família é de R$ 183,00, pode-se estimar que o valor de *m* é:
a) R$ 172,00 b) R$ 184,00 c) R$ 202,00 d) R$ 234,00

91. (Mackenzie-SP)

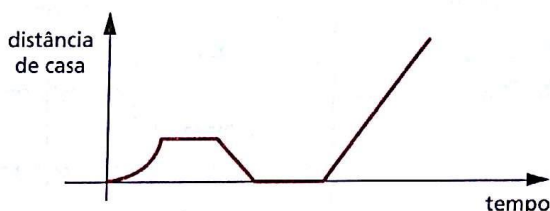
Turma	Nº de alunos	Média das notas obtidas
A	60	5,0
B	50	4,0
C	40	7,0
D	50	3,0

A tabela acima refere-se a uma prova aplicada a 200 alunos, distribuídos em 4 turmas A, B, C e D. A média aritmética das notas dessa prova é
a) 4,65 b) 4,25 c) 4,45 d) 4,55 e) 4,35

Introdução às funções

92. (FGV-SP) Para cada par ordenado de números reais (a, b), com $a \neq b$, definimos a operação $\not\!\!\nearrow$ da seguinte forma: $a \not\!\!\nearrow b = \dfrac{a+b}{a-b}$.
O valor de $[(1 \not\!\!\nearrow 2) \not\!\!\nearrow 3] \not\!\!\nearrow 4$ é

a) -4. b) -1. c) 0. d) $\frac{1}{2}$. e) $\frac{3}{4}$.

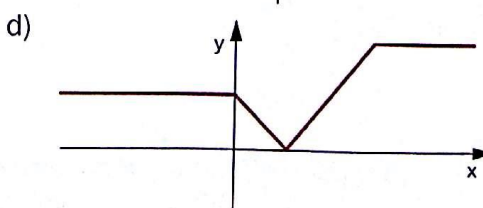
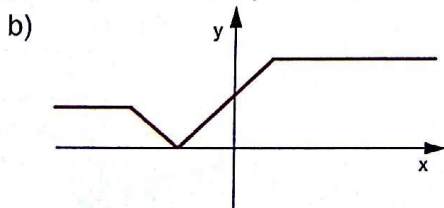
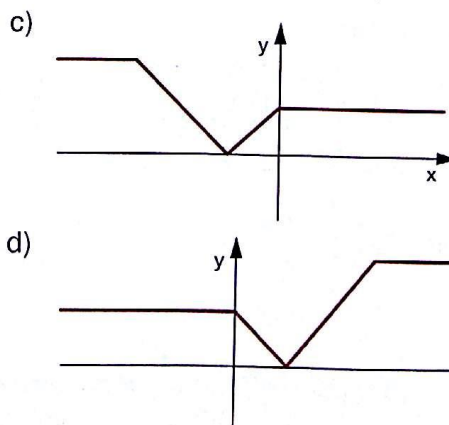
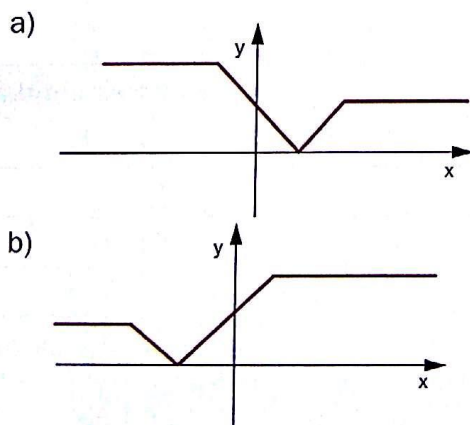
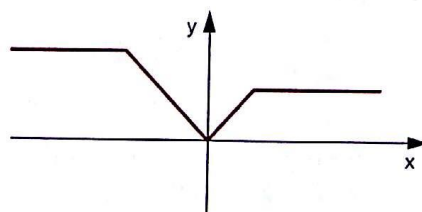
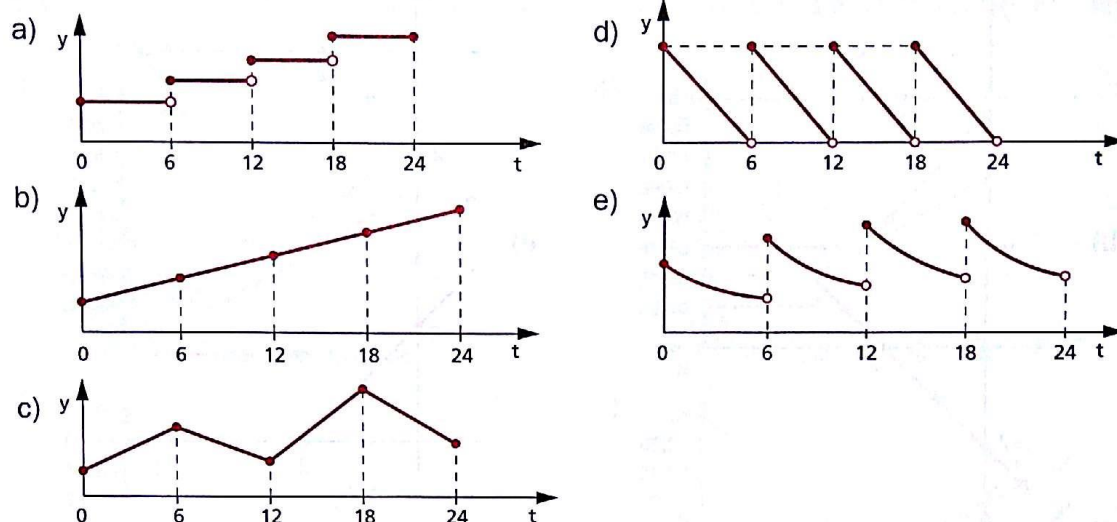
93. (UF-PR) Assinale a alternativa que apresenta a história que melhor se adapta ao gráfico.

a) Assim que saí de casa lembrei que deveria ter enviado um documento para um cliente por *e-mail*. Resolvi voltar e cumprir essa tarefa. Aproveitei para responder mais algumas mensagens e, quando me dei conta, já havia passado mais de uma hora. Saí apressada e tomei um táxi para o escritório.
b) Saí de casa e quando vi o ônibus parado no ponto corri para pegá-lo. Infelizmente o motorista não me viu e partiu. Após esperar algum tempo no ponto, resolvi voltar para casa e chamar um táxi. Passado algum tempo, o táxi me pegou na porta de casa e me deixou no escritório.
c) Eu tinha acabado de sair de casa quando tocou o celular e parei para atendê-lo. Era meu chefe, dizendo que eu estava atrasado para uma reunião. Minha sorte é que nesse momento estava passando um táxi. Acenei para ele e poucos minutos depois eu já estava no escritório.
d) Tinha acabado de sair de casa quando o pneu furou. Desci do carro, troquei o pneu e finalmente pude ir para o trabalho.
e) Saí de casa sem destino — estava apenas com vontade de andar. Após ter dado umas dez voltas na quadra, cansei e resolvi entrar novamente em casa.

94. (UF-MG) Na figura ao lado, está representado o gráfico da função $y = f(x)$.
Com base nas informações desse gráfico, assinale a alternativa cuja figura melhor representa o gráfico da função $g(x) = f(1 - x)$.

a)

c)

b)

d)

95. (Unifesp-SP) Uma forma experimental de insulina está sendo injetada a cada 6 horas em um paciente com diabetes. O organismo usa ou elimina a cada 6 horas 50% da droga presente no corpo. O gráfico que melhor representa a quantidade Y da droga no organismo como função do tempo *t*, em um período de 24 horas, é

96. (Enem-MEC) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

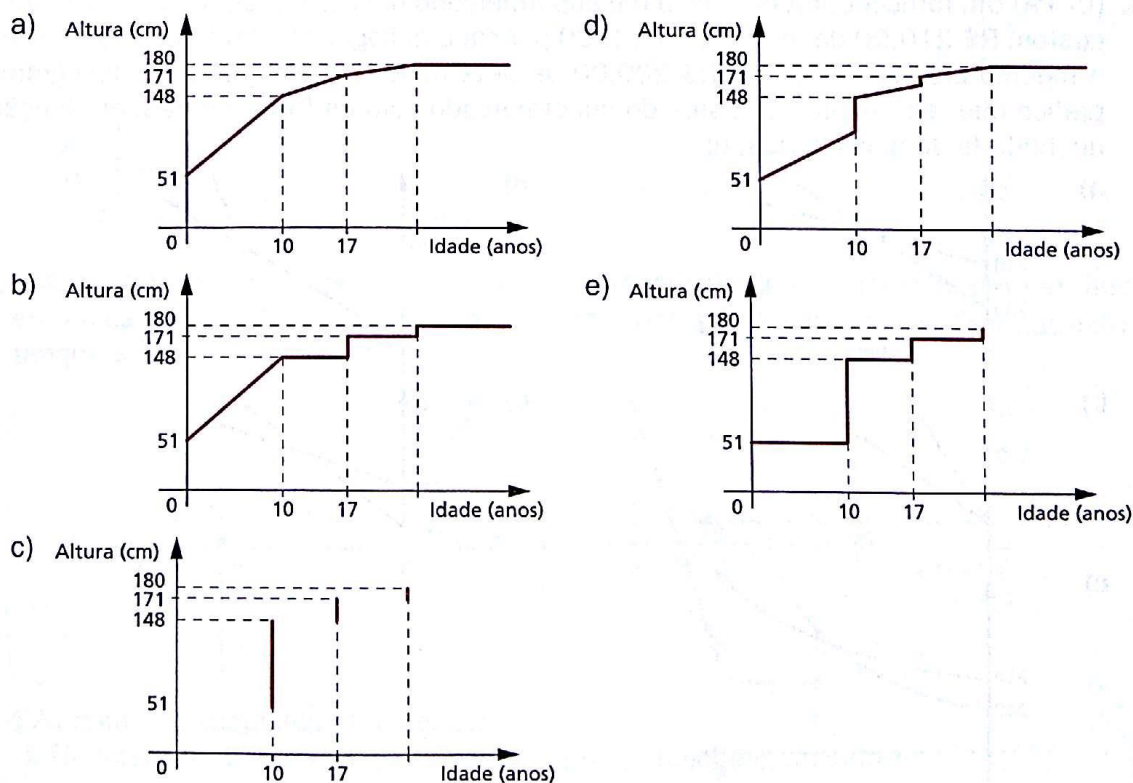
Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

a)

d)

b)

e)

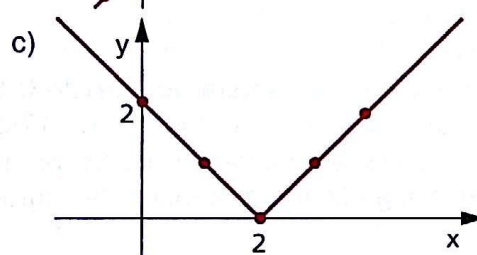
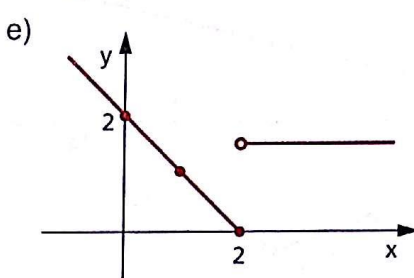
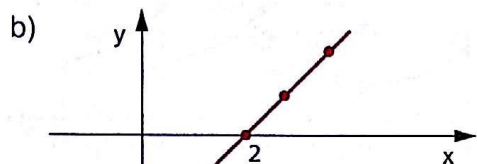
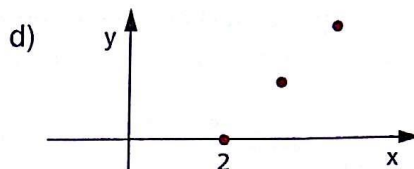
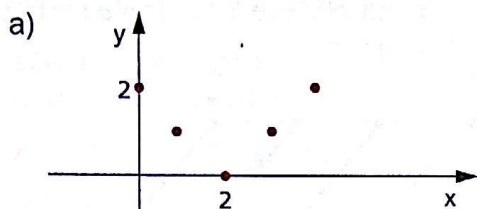
c)

97. (UF-AM) Qual das representações gráficas abaixo melhor representa a aplicação f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 2$.

a)

d)

b)

e)

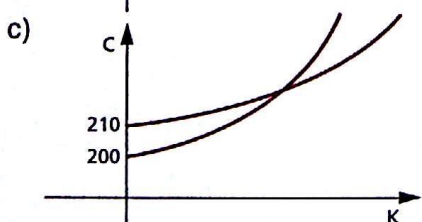
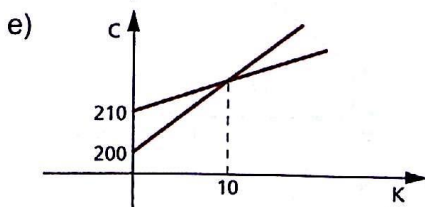
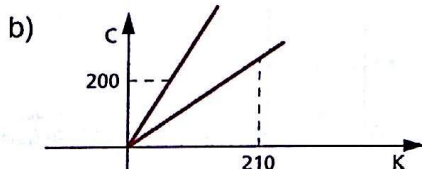
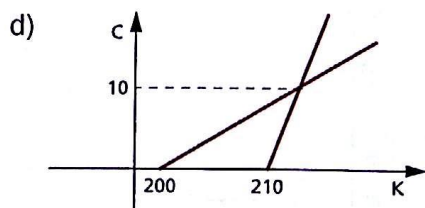
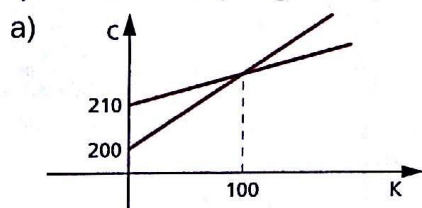
c)

98. (UF-PA) Um fornecedor A oferece a um supermercado um certo produto com os seguintes custos: R$ 210,00 de frete mais R$ 2,90 por cada quilograma. Um fornecedor B oferece o mesmo produto, cobrando R$ 200,00 de frete mais R$ 3,00 por cada quilograma. O gráfico que representa os custos do supermercado com os fornecedores, em função da quantidade de quilogramas, é:

a)

d)

b)

e)

c)

99. (Enem-MEC) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

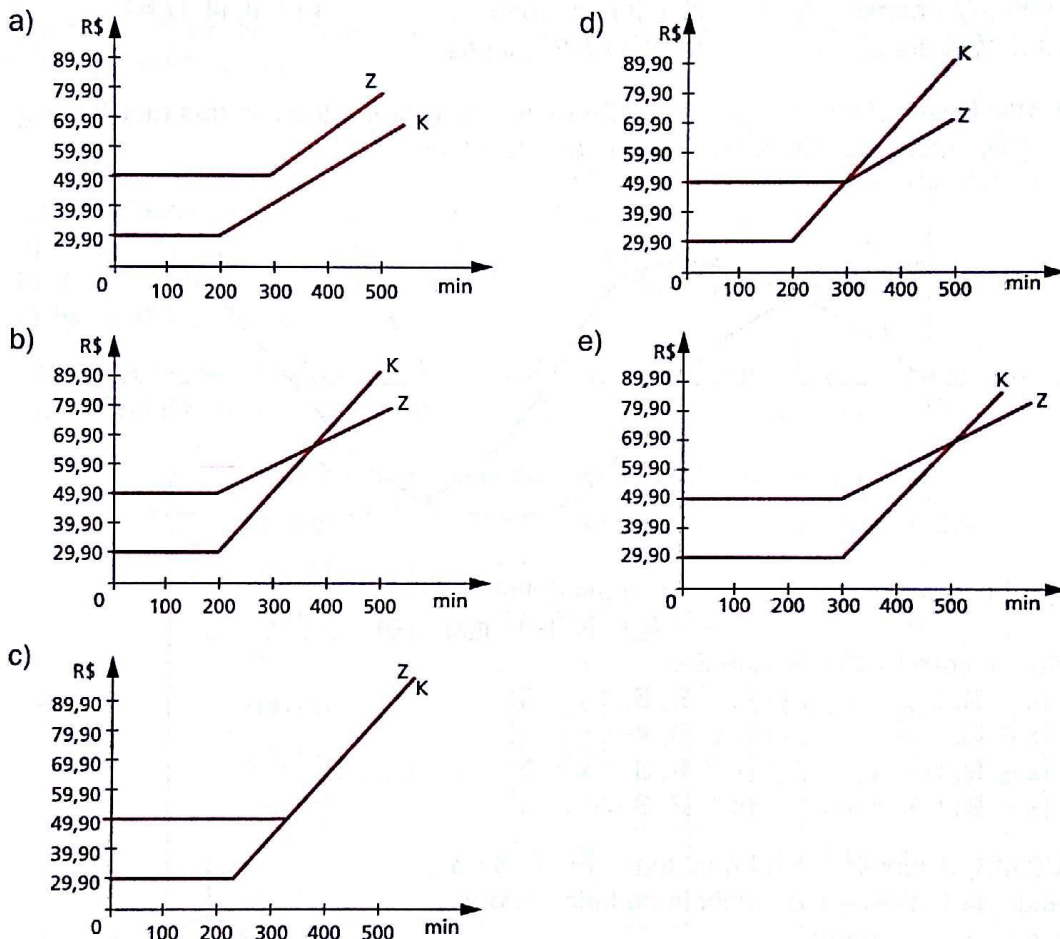
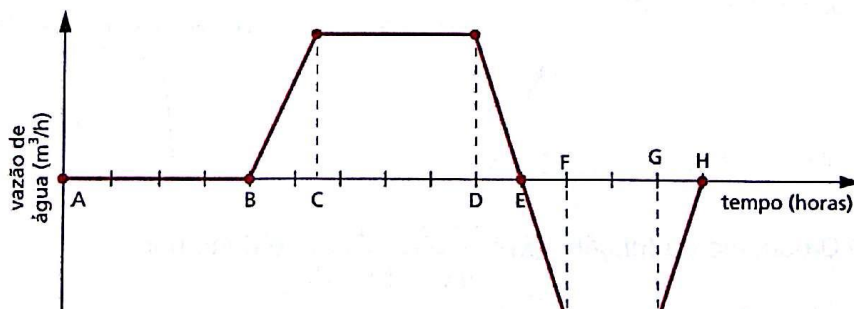
O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos, em função dos minutos utilizados, é

a)

d)

b)

e)

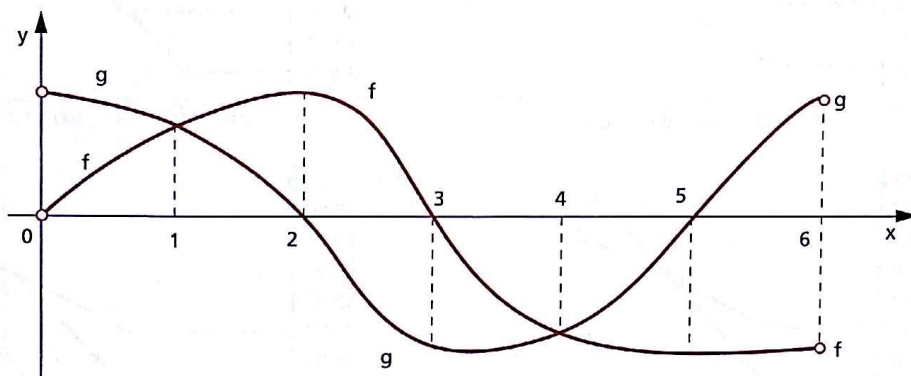
c)

100. (Unesp-SP) O gráfico representa a vazão resultante de água, em m³/h, em um tanque, em função do tempo, em horas. Vazões negativas significam que o volume de água no tanque está diminuindo.

São feitas as seguintes afirmações:

I. No intervalo de A até B, o volume de água no tanque é constante.

II. No intervalo de B até E, o volume de água no tanque está crescendo.
III. No intervalo de E até H, o volume de água no tanque está decrescendo.
IV. No intervalo de C até D, o volume de água no tanque está crescendo mais rapidamente.
V. No intervalo de F até G, o volume de água no tanque está decrescendo mais rapidamente.

É correto o que se afirma em:

a) I, III e V, apenas.
b) II e IV, apenas.
c) I, II e III, apenas.
d) III, IV e V, apenas.
e) I, II, III, IV e V.

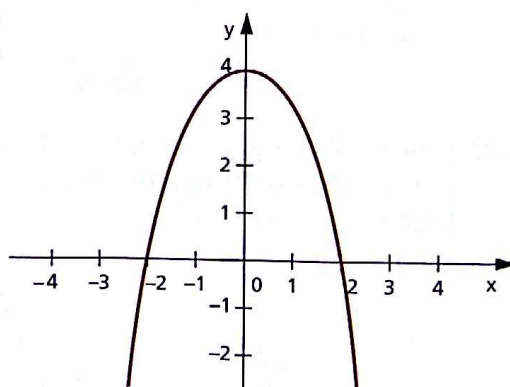
101. (UF-MG) Neste plano cartesiano, estão representados os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, ambas definidas no intervalo aberto $]0, 6[$:

Seja S o subconjunto de números reais definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \cdot g(x) < 0\}.$$

Então, é correto afirmar que S é

a) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 5 < x < 6\}$.
b) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 4 < x < 5\}$.
c) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 5\}$.
d) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 6\}$.

102. (PUC-MG) A função *f* é tal que $f(x) = \sqrt{g(x)}$. Se o gráfico da função *g* é a parábola ao lado, o domínio de *f* é o conjunto:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

103. (FEI-SP) O domínio da função $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}$ é dado por:

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$
d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$
e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x > 4\}$

104. (FGV-SP) Seja f uma função tal que $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ para todos os números reais positivos x e y. Se $f(300) = 5$, então, $f(700)$ é igual a

a) $\frac{15}{7}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{7}$ d) $\frac{8}{3}$ e) $\frac{11}{4}$

105. (FGV-SP) Seja f uma função $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n+1) = \frac{2 \cdot f(n) + 1}{2}$ e $f(1) = 2$. Nessas condições, $f(101)$ é igual a

a) 49. b) 50. c) 51. d) 52. e) 53.

106. (UF-MT) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $f(tx) = t^2 \cdot f(x)$, para quaisquer x e t reais. A partir dessas informações, assinale a alternativa correta.

a) $f(-x) = f(x)$, para qualquer x real.
b) $f(-x) = -f(x)$, para qualquer x real.
c) $f(x) \geqslant 0$, para qualquer x real.
d) $f(0) = 1$.
e) $f(1) = 1$.

107. (UF-GO) A tabela abaixo mostra a evolução da área plantada e a produção de cana-de-açúcar no Estado de Goiás, nas safras 2001/2002 a 2008/2009.

Evolução da cana-de-açúcar no Estado de Goiás

Safra	Área plantada (ha)	Produção (toneladas)
01/02	129 921	10 253 497
02/03	203 865	11 674 140
03/04	168 007	12 907 592
04/05	176 328	14 001 079
05/06	200 048	15 642 125
06/07	237 547	19 049 550
07/08	281 800	20 800 000
08/09	339 200	33 100 000*

* estimativa

Fonte: IBGE/SIFAEG, <www.ibge.gov.br>.

Analisando os dados apresentados, pode-se concluir que o gráfico que representa a produtividade média por hectare de cana-de-açúcar no período considerado é:

a)

b)

Produtividade média por hectare (toneladas)
330
290
250
210
170
130
01/02
02/03
03/04
04/05
05/06
06/07
07/08
08/09

c)

Produtividade média por hectare (toneladas)
100
90
80
70
60
50
01/02
02/03
03/04
04/05
05/06
06/07
07/08
08/09

d)

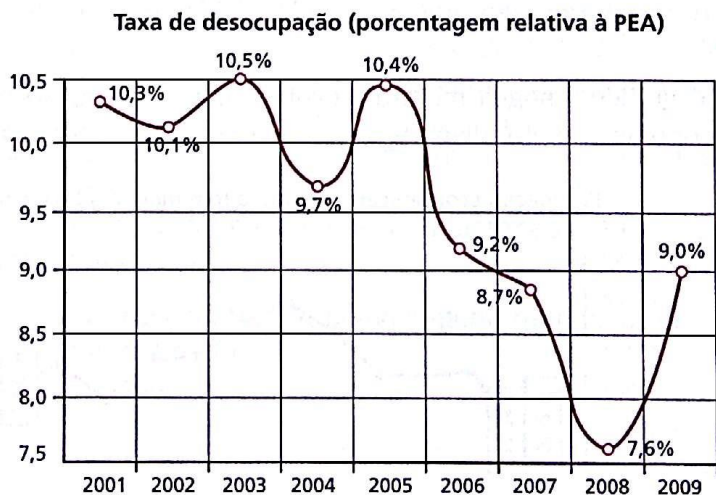
Produtividade média por hectare (toneladas)
100
90
80
70
60
50
01/02
02/03
03/04
04/05
05/06
06/07
07/08
08/09

e)

Produtividade média por hectare (toneladas)
100
90
80
70
60
50
01/02
02/03
03/04
04/05
05/06
06/07
07/08
08/09

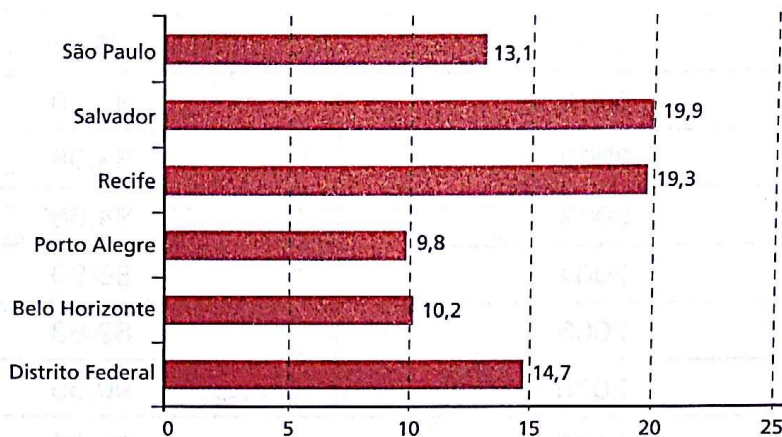
108. (UF-GO) A tabela a seguir apresenta a quantidade de pessoas da população economicamente ativa (PEA) no Brasil, nos anos de 2001 a 2009. Já o gráfico apresenta, no mesmo período, a taxa de desocupação, que é o porcentual de pessoas da PEA desempregadas.

População economicamente ativa (PEA), em milhões de pessoas	
Ano	**PEA**
2001	80,40
2002	83,08
2003	84,68
2004	86,99
2005	89,53
2006	90,55
2007	91,76
2008	93,33
2009	95,38

Disponível em: <http://www.ipea.gov.br>. Acesso em: 21 mar. 2011. [Adaptado].

BRASIL. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. PNAD 2009 – Primeiras análises: o mercado de trabalho brasileiro em 2009. Comunicado IPEA, n. 62, 23 set. 2010, p. 10. Disponível em: <http://www.ipea.gov.br>. Acesso em: 21 mar. 2011. [Adaptado].

Com base nas informações apresentadas, conclui-se que a quantidade absoluta de desocupados no Brasil, no ano de 2009, foi

a) superior à quantidade de desocupados em 2001.
b) superior à quantidade de desocupados em 2003.
c) inferior à quantidade de desocupados em 2004.
d) inferior à quantidade de desocupados em 2006.
e) inferior à quantidade de desocupados em 2008.

109. (Enem-MEC) Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010. [Adaptado].

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

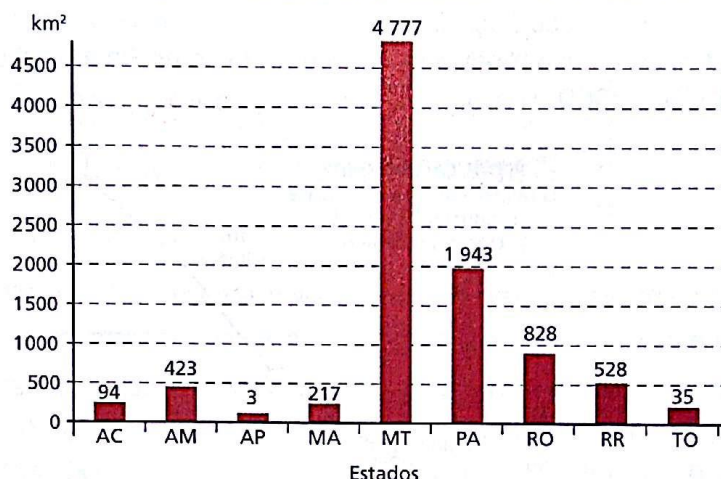
a) 24 500.
b) 25 000.
c) 220 500.
d) 223 000.
e) 227 500.

110. (Enem-MEC) O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis regiões metropolitanas pesquisadas.

Fonte: IBGE (disponível em: <www.ibge.gov.br>).

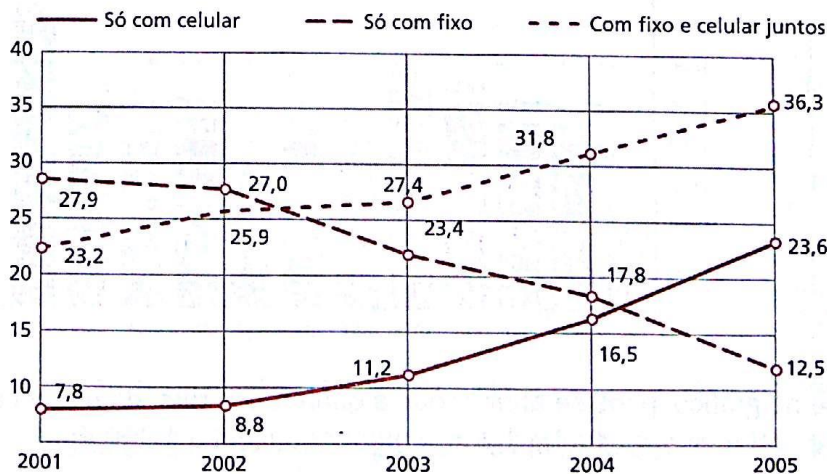
Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a:

a) 23 940.
b) 32 228.
c) 920 800.
d) 23 940 800.
e) 32 228 000.

111. (Unesp-SP) A Amazônia Legal, com área de aproximadamente 5215000 km², compreende os estados do Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima e Tocantins, e parte do estado do Maranhão. Um sistema de monitoramento e controle mensal do desmatamento da Amazônia utilizado pelo INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) é o Deter (Detecção de Desmatamento em Tempo Real). O gráfico apresenta dados apontados pelo Deter referentes ao desmatamento na Amazônia Legal, por estado, no período de 1º de julho de 2007 a 30 de junho de 2008, totalizando 8848 km² de área desmatada.

Disponível em: <http://www.obt.inpe.br/deter/> – valores aproximados.

Com base nos dados apresentados, podemos afirmar:

a) o estado onde ocorreu a maior quantidade de km² desmatados foi o do Pará.
b) a área total de desmatamento corresponde a menos de 0,1% da área da Amazônia Legal.
c) somando-se a quantidade de áreas desmatadas nos estados de Roraima e Tocantins, obtemos um terço da quantidade de área desmatada em Rondônia.
d) o estado do Mato Grosso foi responsável por mais de 50% do desmatamento total detectado nesse período.
e) as quantidades de áreas desmatadas no Acre, Maranhão e Amazonas formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

112. (UF-GO) O gráfico abaixo representa, em porcentagem, os domicílios com telefone, em relação ao total de domicílios no Brasil.

Folha de S. Paulo, São Paulo, 16 set. 2006, p. B19.

De acordo com os dados desse gráfico, em 2005, os domicílios com telefone fixo representavam, em relação ao total de domicílios,

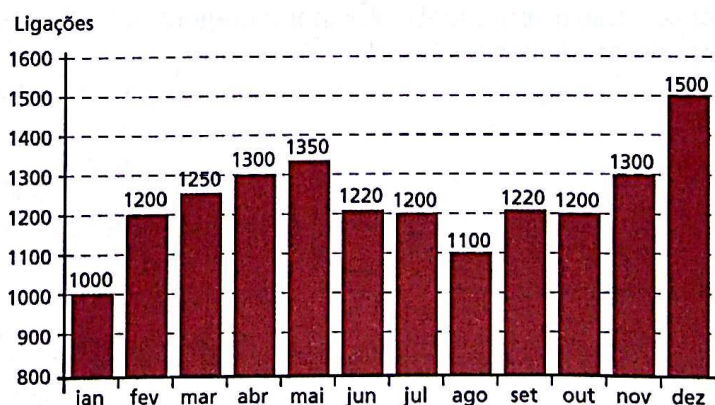
a) 12,5%
b) 36,3%
c) 48,8%
d) 49,6%
e) 59,9%

113. (Enem-MEC) Para conseguir chegar a um número recorde de produção de ovos de Páscoa, as empresas brasileiras começam a se planejar para esse período com um ano de antecedência. O gráfico abaixo mostra o número de ovos de Páscoa produzidos no Brasil no período de 2005 a 2009.

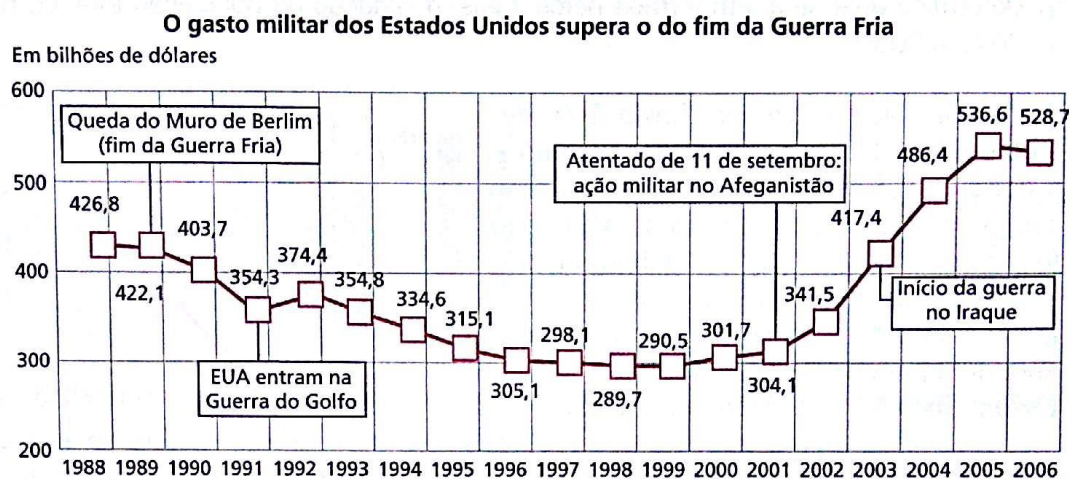
Revista *Veja*, São Paulo: Abril, ed. 2107, n. 14, ano 42.

De acordo com o gráfico, o biênio que apresentou maior produção acumulada foi

a) 2004-2005.
b) 2005-2006.
c) 2006-2007.
d) 2007-2008.
e) 2008-2009.

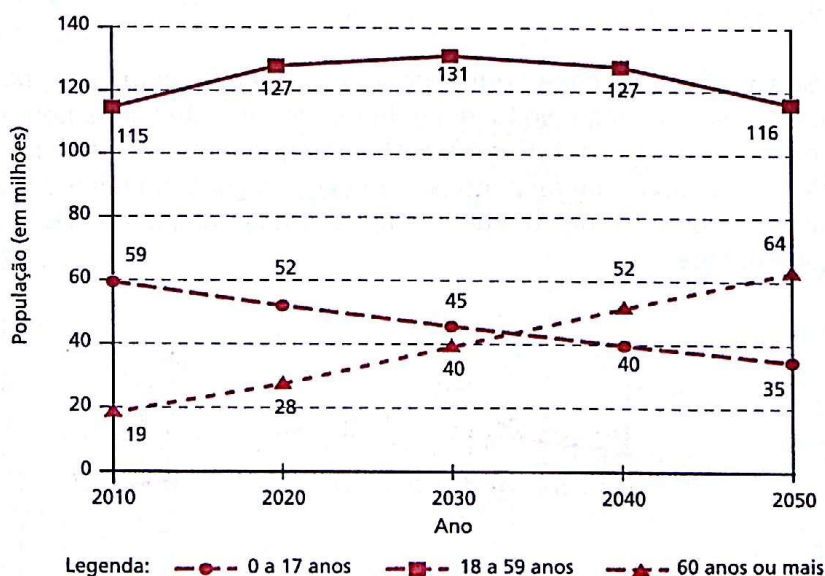
114. (Unesp-SP) O número de ligações telefônicas de uma empresa, mês a mês, no ano de 2005, pode ser representado pelo gráfico.

Com base no gráfico, pode-se afirmar que a quantidade total de meses em que o número de ligações foi maior ou igual a 1200 e menor ou igual a 1300 é:

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

115. (Enem-MEC) O gráfico a seguir apresenta o gasto militar dos Estados Unidos, no período de 1988 a 2006.

Fonte: Instituto Internacional de Pesquisa da Paz de Estocolmo (Sipri). Almanaque Abril 2008. Editora Abril.

Com base no gráfico, o gasto militar no início da guerra no Iraque foi de

a) US$ 4174000,00
b) US$ 41740000,00
c) US$ 417400000,00
d) US$ 41740000000,00
e) US$ 417400000000,00

116. (Unicamp-SP) Segundo o IBGE, nos próximos anos, a participação das gerações mais velhas na população do Brasil aumentará. O gráfico abaixo mostra uma estimativa da população brasileira por faixa etária, entre os anos de 2010 e 2050. Os números apresentados no gráfico indicam a população estimada, em milhões de habitantes, no início de cada ano. Considere que a população varia linearmente ao longo de cada década.

a) Com base nos valores fornecidos no gráfico, calcule exatamente em que ano o número de habitantes com 60 anos ou mais irá ultrapassar o número de habitantes com até

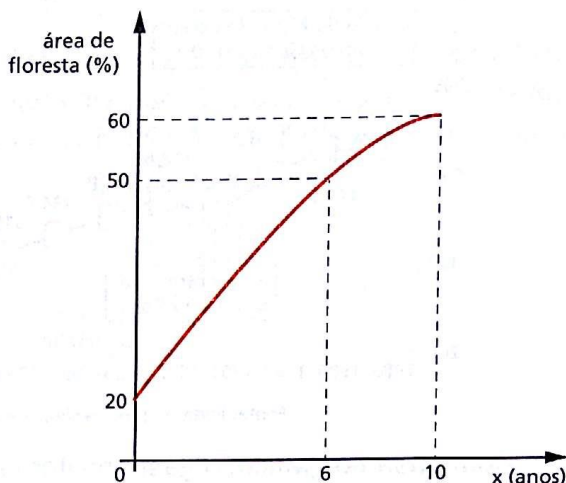
17 anos. (Atenção: não basta encontrar um número aproximado a partir do gráfico. É preciso mostrar as contas.)

b) Determine qual será, em termos percentuais, a variação da população total do país entre 2040 e 2050.

117. (Unesp-SP) Numa fazenda, havia 20% de área de floresta. Para aumentar essa área, o dono da fazenda decidiu iniciar um processo de reflorestamento. No planejamento do reflorestamento, foi elaborado um gráfico fornecendo a previsão da porcentagem de área de floresta na fazenda a cada ano, num período de dez anos.

Esse gráfico foi modelado pela função

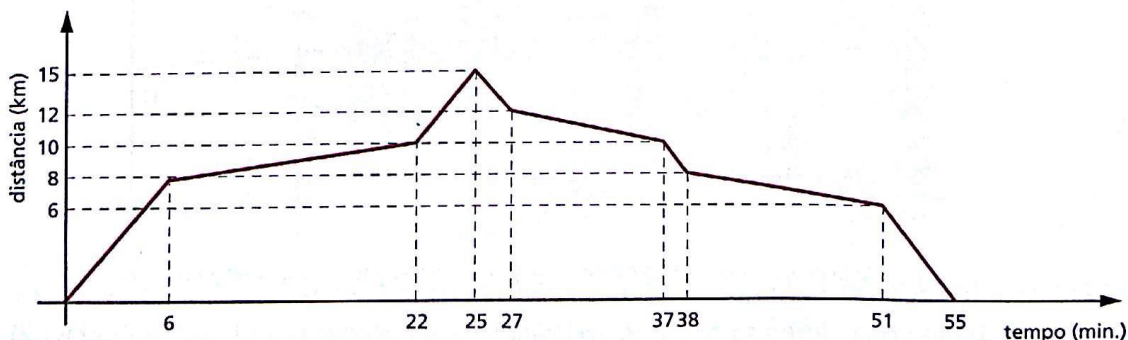
$$f(x) = \frac{ax + 200}{bx + c},$$

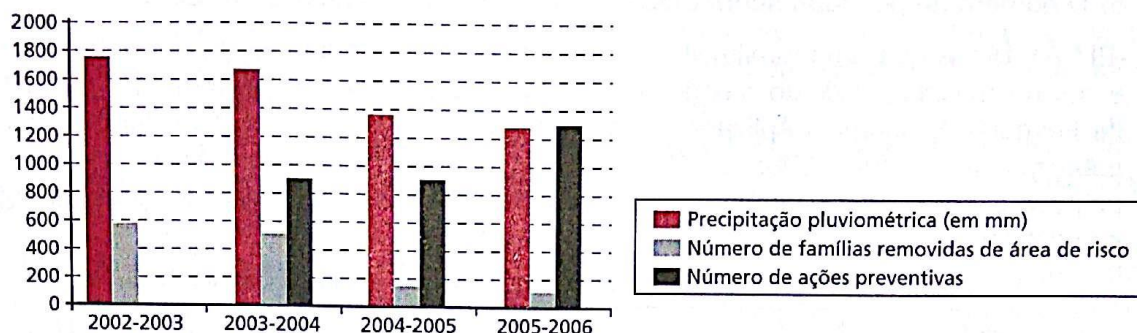
que fornece a porcentagem de área de floresta na fazenda a cada ano x, onde a, b e c são constantes reais. Com base no gráfico, determine as constantes a, b e c e reescreva a função f(x) com as constantes determinadas.

118. (UF-PR) 100 litros de uma solução contêm inicialmente 75% de álcool e 25% de água. Indiquemos por f(x) a concentração de água nessa solução após x litros da água serem removidos, isto é,

$$f(x) = \frac{\text{volume da água na solução após } x \text{ litros de água serem removidos}}{\text{volume da solução após } x \text{ litros da água serem removidos}}$$

a) Qual o valor de f(0)?

b) Obtenha a expressão de f(x) em termos de x.

119. (UF-MA) Seu José sai de casa normalmente pela manhã, bem cedo, para levar seu filho à escola. No trajeto de ida e volta, ele enfrenta geralmente vários pontos de retenção do tráfego (congestionamentos). O gráfico abaixo representa a distancia, em km, que Seu José está de sua casa, com respeito ao tempo de viagem, em minutos, até o seu retorno, após deixar o filho na escola, em um dia típico. Nesse dia, quanto tempo ele passou em congestionamentos?

a) 39 min b) 38 min c) 27 min d) 44 min e) 56 min

120. (UF-MG) Neste gráfico, estão representadas informações referentes aos períodos de chuva (outubro a abril) de 2002-2003 a 2005-2006, em Belo Horizonte:

Fonte: *Estado de Minas*, 5 abr. 2006 (adaptado).

Obs.: Os dados sobre ações preventivas no período 2002-2003 não foram disponibilizados.

Considere estas afirmativas referentes aos dados contidos nesse gráfico:

I. O número de famílias removidas de áreas de risco foi proporcional à precipitação pluviométrica verificada nos períodos pesquisados.

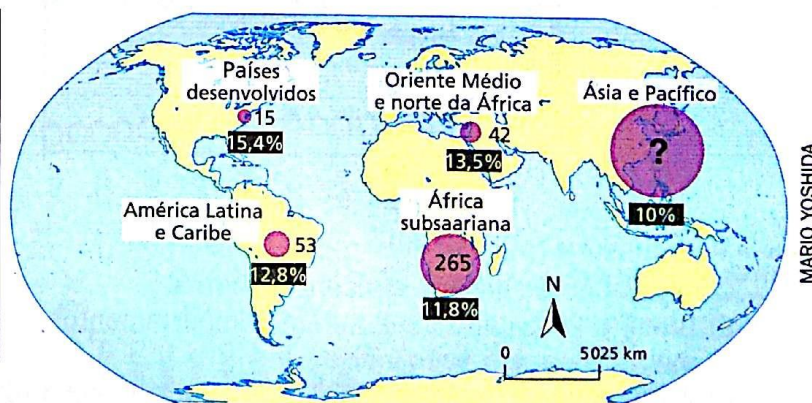
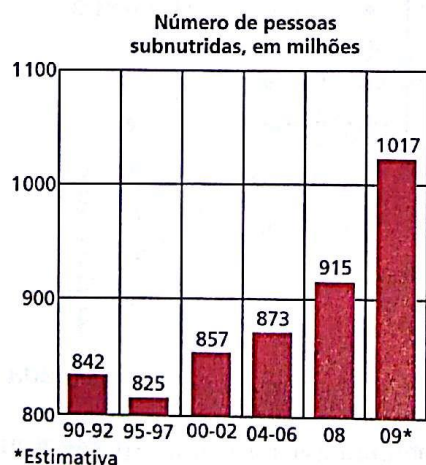
II. A precipitação pluviométrica foi superior a 1700 mm no período 2002-2003.

III. O número de ações preventivas no período 2005-2006 foi, pelo menos, 30% maior que no período 2003-2004.

IV. O número de famílias removidas de áreas de risco no período 2002-2003 foi, pelo menos, 10 vezes maior que no período 2005-2006.

Com base nessas informações, conclui-se, corretamente, que

a) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
b) apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.
c) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.

121. (FGV-SP) Uma pesquisa publicada pela Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação mostra como a crise global provoca o aumento do número de pessoas que passam fome no mundo.

Fonte: Organização das Nações Unidas para a Agricultura e Alimentação.

A partir das informações dos gráficos, calcule:

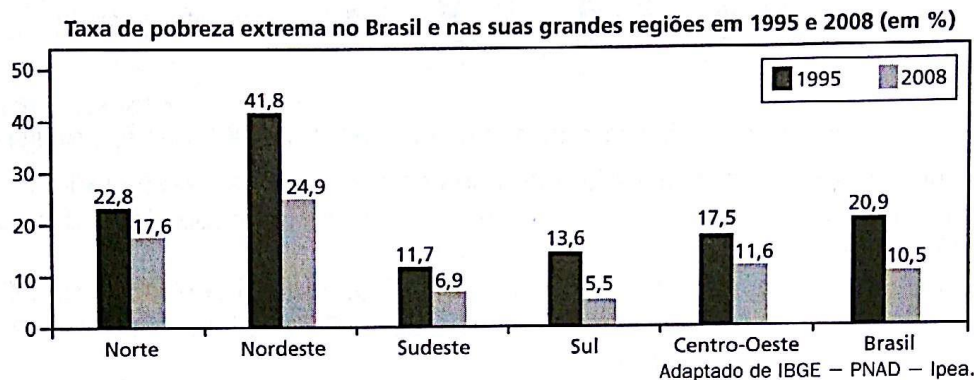
a) O número de pessoas subnutridas na zona de Ásia e Pacífico em 2009.

b) O número de pessoas subnutridas na zona de Ásia e Pacífico em 2008.

122. (UFF-RJ) Diz-se que uma família vive na pobreza extrema se sua renda mensal por pessoa é de, no máximo, 25% do salário mínimo nacional. Segundo levantamento do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), mais de treze milhões de brasileiros saíram da pobreza extrema entre 1995 e 2008. No entanto, a diminuição generalizada nas taxas de pobreza extrema nesse período não ocorreu de forma uniforme entre as grandes regiões geográficas do país, conforme ilustra o gráfico abaixo.

Taxa de pobreza extrema no Brasil e nas suas grandes regiões em 1995 e 2008 (em %)

	1995	2008
Norte	22,8	17,6
Nordeste	41,8	24,9
Sudeste	11,7	6,9
Sul	13,6	5,5
Centro-Oeste	17,5	11,6
Brasil	20,9	10,5

Adaptado de IBGE – PNAD – Ipea.

Tendo em vista o gráfico, verifica-se que a taxa nacional de pobreza extrema caiu 49,8%, passando de 20,9% para 10,5%. Pode-se concluir, então, que a região em que a taxa de pobreza extrema (em %) caiu mais de 50% foi

a) a região Norte.

b) a região Sudeste.

c) a região Nordeste.

d) a região Centro-Oeste.

e) a região Sul.

123. (UF-CE) O gráfico abaixo apresenta a incidência de tuberculose, de 1990 a 2006, em quatro países lusófonos, Angola, Brasil, Moçambique e Portugal, segundo dados da Organização Mundial de Saúde.

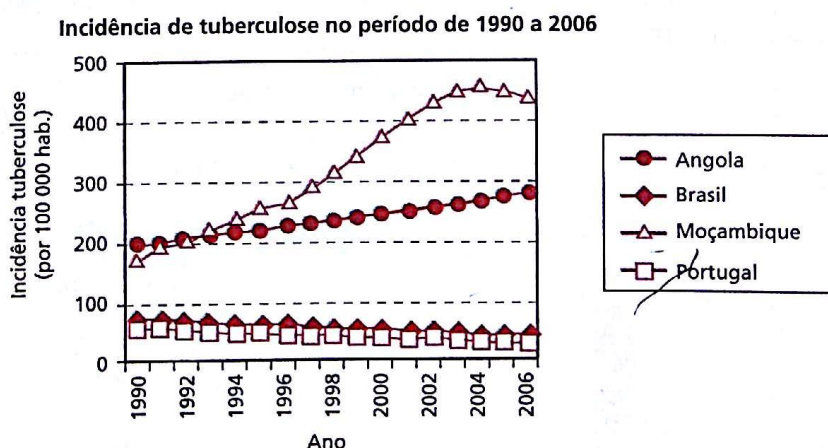
Incidência de tuberculose no período de 1990 a 2006

Incidência tuberculose (por 100 000 hab.)

Ano

Angola

Brasil

Moçambique

Portugal

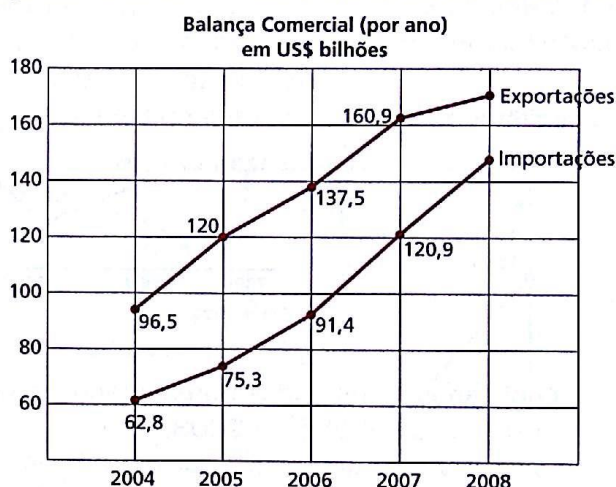
Com base neste gráfico, é incorreto afirmar:

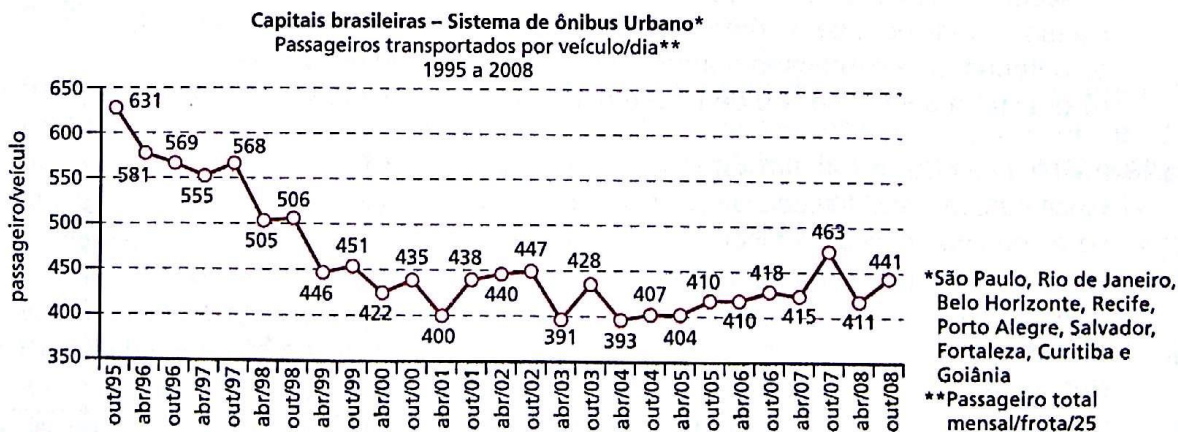
a) Brasil e Portugal apresentaram comportamentos parecidos, com queda aproximadamente linear em seus índices.

b) No período de 1990 a 2006, dos quatro países, Moçambique foi o que apresentou maior crescimento de incidência relativa de tuberculose.

c) Nos últimos três anos do levantamento, de 2004 a 2006, Brasil e Portugal apresentaram diminuição da incidência relativa de casos de tuberculose, enquanto Angola e Moçambique apresentaram crescimento do índice.
d) No início do período estudado, dos quatro países, Angola era o país que apresentava maior índice de incidência, mas foi largamente ultrapassado por Moçambique, cujo índice aproximadamente dobrou na década de 90.
e) Em 2006, o índice de incidência de tuberculose em Angola era superior ao quíntuplo do índice brasileiro, enquanto o índice de Moçambique era superior a oito vezes o índice do Brasil.

124. (UF-GO) Segundo reportagem do jornal *Folha de S. Paulo* (São Paulo, 16 nov. 2008, p. B3), as exportações no Brasil já começavam a sofrer influências da crise econômica global, apresentando como consequência uma queda no saldo (exportações menos importações) da Balança Comercial em 2008. O gráfico ao lado mostra, ano a ano, os valores das exportações e importações da Balança Comercial brasileira.

Considere que a média anual dos saldos da Balança Comercial, referente ao período de 2004 a 2008, foi de US$ 37,06 bilhões, calcule o saldo da Balança Comercial nos anos considerados e faça um gráfico de linha que represente esse saldo.

125. (Enem-MEC) Dados da Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (ANTU) mostram que o número de passageiros transportados mensalmente nas principais regiões metropolitanas do país vem caindo sistematicamente. Eram 476,7 milhões de passageiros em 1995, e esse número caiu para 321,9 milhões em abril de 2001. Nesse período, o tamanho da frota de veículos mudou pouco, tendo no final de 2008 praticamente o mesmo tamanho que tinha em 2001.

O gráfico a seguir mostra um índice de produtividade utilizado pelas empresas do setor, que é a razão entre o total de passageiros transportados por dia e o tamanho da frota de veículos.

Disponível em: <http://www.ntu.org.br>. Acesso em 16 jul. 2009 (adaptado).

Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a:

a) 355 milhões
b) 400 milhões
c) 426 milhões
d) 441 milhões
e) 477 milhões

126. (UF-GO) Analise o gráfico a seguir.

Entre o céu e o inferno. Veja, São Paulo, n. 2159, 7 abr. 2010, p. 70. (Adaptado).

Analisando-se os dados apresentados, conclui-se que o número de voos

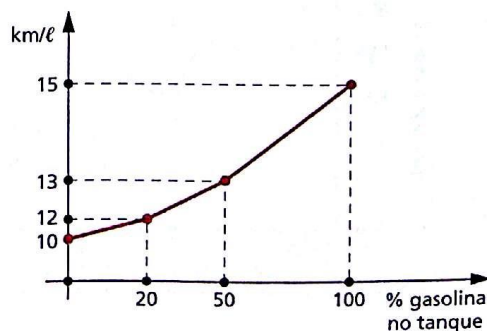
a) diminuiu em 2007 e 2008.
b) sofreu uma queda mais acentuada em 2008 do que em 2007.
c) teve aumento mais acentuado em 2009 do que em 2010.
d) é mais que o dobro em 2010, comparado a 2009.
e) é mais que o dobro em 2011 (estimativa), comparado a 2009.

127. (UF-GO) A seguir é descrita uma brincadeira popular para se descobrir a idade de alguém. É pedido a uma pessoa, com idade inferior a 100 anos, que multiplique por dois o número do mês de seu aniversário, adicione 5 ao resultado e, em seguida, multiplique por 50 o valor obtido. Depois, ela deve adicionar a própria idade ao número obtido e informar o resultado. Subtraindo-se 250 desse resultado, obtém-se um número X, com o qual descobre-se facilmente o mês de nascimento e a idade da pessoa.
Nessas condições, se o número do mês de nascimento é N, e a idade é I,

a) obtenha uma expressão matemática de X em função de N e de I;
b) descubra o valor de N e de I, se o número obtido pela pessoa for $X = 819$.

128. (UF-MG) Elenice possui um carro *flex*, isto é, que funciona com uma mistura de gasolina e etanol no tanque em qualquer proporção. O tanque desse veículo comporta 50 ℓ e o rendimento médio dele pode ser auferido no gráfico ao lado, formado por segmentos de retas.

Nesse gráfico, estão indicados,

- no eixo horizontal, a proporção de gasolina presente no tanque; e,

• no eixo vertical, o rendimento do carro, em km/ℓ.

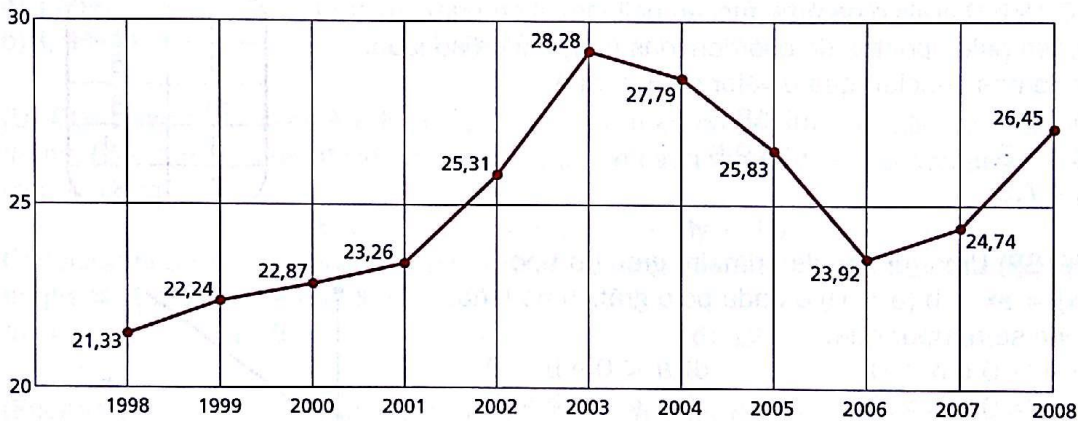
Elenice vai fazer uma viagem, de ida e volta, nesse carro, da cidade A para a cidade B, que distam, uma da outra, 600 km.

I. Elenice sai de A com o tanque cheio apenas de gasolina. Determine quanto de gasolina ainda vai restar no tanque, quando ela chegar a B.

II. Ao chegar na cidade B, Elenice completa o tanque do carro com etanol. Na volta para A, a 300 km de B, ela resolve parar e completar o tanque, novamente com etanol. Determine quanto de etanol ela precisou colocar no tanque nessa parada.

III. Determine quanto ainda restava de combustível no tanque, quando Elenice chegou a A, na volta.

129. (Enem-MEC) O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:

Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). Almanaque Abril 2010, São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

a) 1998 e 2001.
b) 2001 e 2003.
c) 2003 e 2006.
d) 2003 e 2007.
e) 2003 e 2008.

130. (UF-BA) A vitamina C é hidrossolúvel, e seu aproveitamento pelo organismo humano é limitado pela capacidade de absorção intestinal, sendo o excesso de ingestão eliminado pelos rins. Supondo-se que, para doses diárias inferiores a 100 mg de vitamina C, a quantidade absorvida seja igual à quantidade ingerida e que, para doses diárias maiores ou iguais a 100 mg, a absorção seja sempre igual à capacidade máxima do organismo — que é de 100 mg —, pode-se afirmar, sobre a ingestão diária de vitamina C, que são verdadeiras as proposições:

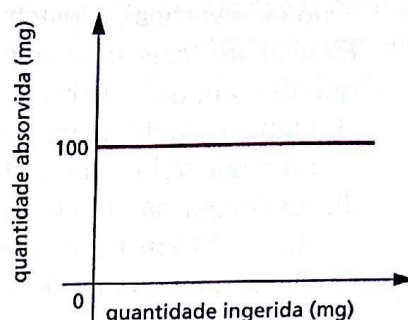
(01) Para a ingestão de até 100 mg, a quantidade absorvida é diretamente proporcional à quantidade ingerida.

(02) Para a ingestão acima de 100 mg, quanto maior for a ingestão, menor será a porcentagem absorvida de vitamina ingerida.

(04) Se uma pessoa ingere 80 mg em um dia e 120 mg no dia seguinte, então a média diária da quantidade absorvida nesses dois dias foi de 100 mg.

(08) A razão entre a quantidade ingerida e a quantidade absorvida pelo organismo é igual a 1.

(16) A função *f* que representa a quantidade de vitamina C absorvida pelo organismo, em função da quantidade ingerida *x*, é dada por $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leqslant x < 100 \\ 100, & \text{se } x \geqslant 100 \end{cases}$.

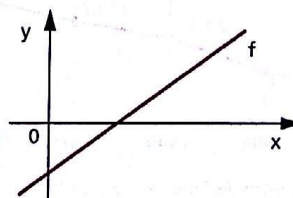
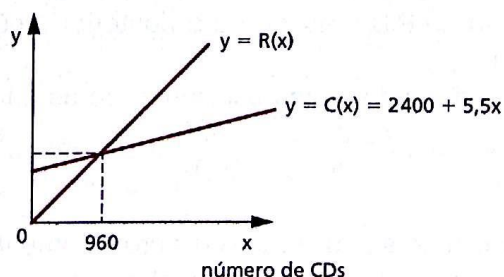
(32) O gráfico ao lado representa a quantidade de vitamina C absorvida pelo organismo em função da quantidade que foi ingerida.

Função polinomial de 1º grau

131. (FGV-RJ) O gráfico de uma função polinomial do primeiro grau passa pelos pontos de coordenadas (x, y) dados ao lado. Podemos concluir que o valor de k + m é:

x	y
0	5
m	8
6	14
7	k

a) 15,5
b) 16,5
c) 17,5
d) 18,5
e) 19,5

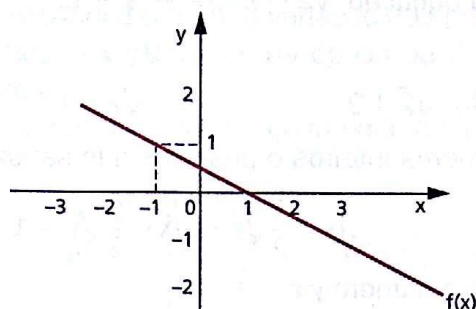
132. (FEI-SP) Uma função de primeiro grau do tipo $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ é dada pelo gráfico ao lado. Pode-se afirmar que:

a) $a > 0$ e $b < 0$
b) $a > 0$ e $b > 0$
c) $a < 0$ e $b < 0$
d) $a < 0$ e $b > 0$
e) $a < 0$ e $b = 0$

133. (Mackenzie-SP)

A figura mostra os gráficos das funções custo total C(x) e receita total R(x) de uma empresa produtora de CDs. Se, produzindo e comercializando 960 CDs, o custo e a receita são iguais, o lucro pela venda de 2 000 CDs é:

a) 1400 b) 2500 c) 3000 d) 2600 e) 1580

134. (FGV-SP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim. Se $f(1) \leqslant f(2)$, $f(3) \geqslant f(4)$ e $f(5) = 5$, então $f(\pi)$ é

a) um número irracional.
b) um racional não inteiro.
c) -1.
d) 0.
e) 5.

135. (Unesp-SP) Observe o gráfico da função f(x) e analise as afirmações a seu respeito.

I. Se $x_1, x_2 \in Dom(f)$ e $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$.
II. Se $x > 1$, então $f(x) < 0$.
III. O ponto $(2, -2)$ pertence ao gráfico de f(x).
IV. A lei de formação de f(x) representada no gráfico é dada por $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)$.
A alternativa que corresponde a todas as afirmações verdadeiras é:
a) I e III.
b) I, II e III.
c) I e IV.
d) II, III e IV.
e) II e IV.

136. (UF-GO) Duas empresas A e B comercializam o mesmo produto. A relação entre o patrimônio (y) e o tempo de atividade em anos (x) de cada empresa é representada, respectivamente, por:

$$A: x - 2y + 6 = 0 \text{ e } B: x - 3y + 15 = 0$$

Considerando essas relações, o patrimônio da empresa A será superior ao patrimônio da empresa B a partir de quantos anos?
a) 3
b) 5
c) 9
d) 12
e) 15

137. (Enem-MEC) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.
Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?
a) 38000
b) 40500
c) 41000
d) 42000
e) 48000

138. (PUC-MG) O valor de *x* que torna verdadeira a igualdade $x - \frac{x+3}{3} = \frac{x}{2}$ é um número:
a) inteiro e negativo.
b) par e múltiplo de 5.
c) primo e divisor de 12.
d) natural e divisor de 30.

139. (UF-PE) Um estudante apresenta a resolução a seguir, composta de quatro equivalências:
I. $\frac{x+2}{x+1} > 2 \Leftrightarrow x+2 > 2(x+1)$
II. $x + 2 > 2(x + 1) \Leftrightarrow x + 2 > 2x + 2$
III. $x + 2 > 2x + 2 \Leftrightarrow -x > 0$
IV. $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$
Estão corretas apenas:
a) II e III
b) I, II e III
c) II, III e IV
d) I, II e IV
e) II e IV

140. (UF-CE) O valor de x na equação $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + x}}$ é:

a) $\sqrt{2} - 2$ b) $\sqrt{2} + 2$ c) $\sqrt{2} - 1$ d) $-\sqrt{2} - 1$

141. (UF-PI) Sejam x e y números inteiros e positivos que satisfazem à equação:

$$\sqrt{x + \frac{1}{2}\sqrt{y}} - \sqrt{x - \frac{1}{2}\sqrt{y}} = 1$$

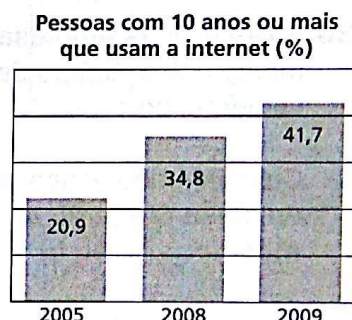
Um possível valor para o número y é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

142. (PUC-MG) Os possíveis valores de x que verificam a desigualdade $-1 \leqslant 3x - 2 \leqslant 1$ são tais que $a \leqslant x \leqslant b$. Então o valor de $a + b$ é igual a:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{5}{3}$

143. (FGV-RJ) **Você usa a internet?**

Observe os resultados de uma pesquisa sobre esse tema.

A pesquisa de 2009 foi feita em 500 domicílios e com 2000 pessoas com 10 anos ou mais de idade.

a) Quantos domicílios pesquisados tinham acesso à internet em 2009?
b) Em 2009, quantas pessoas disseram que usavam a internet?
c) Considere que o gráfico das porcentagens de domicílios com acesso à internet, nos anos 2008, 2009 e 2010, seja formado por pontos aproximadamente alinhados. Faça uma estimativa da porcentagem de domicílios com acesso à internet em 2010.

144. (Enem-MEC) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

Figura I

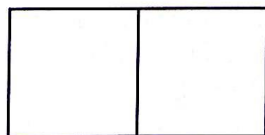



Figura II

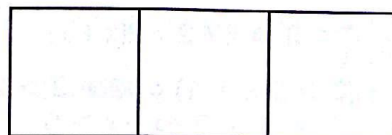



Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a) C = 4Q b) C = 3Q + 1 c) C = 4Q − 1 d) C = Q + 3 e) C = 4Q − 2

145. (Enem-MEC) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

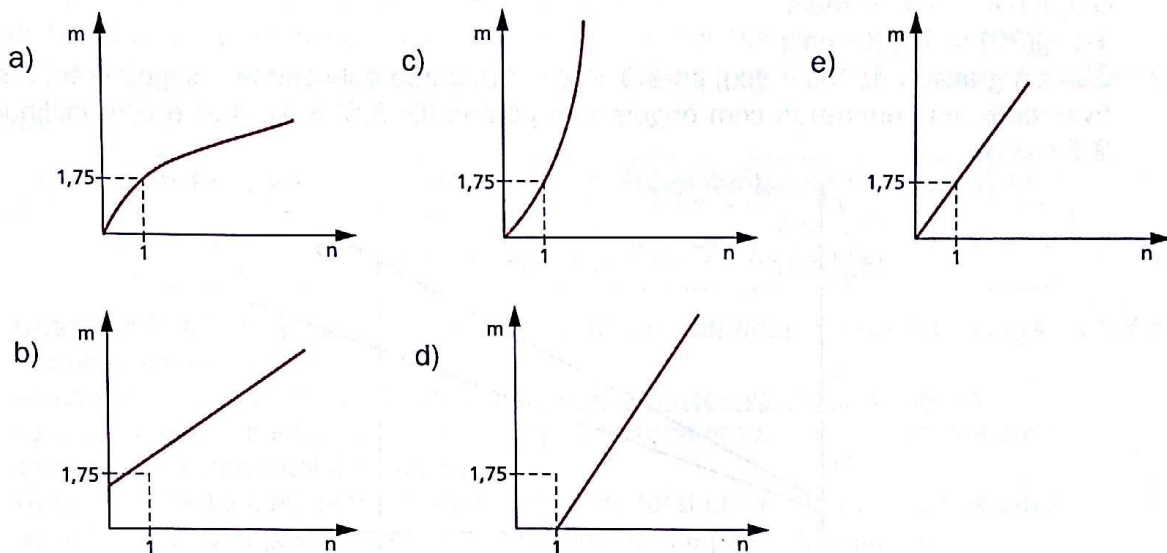
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é:

a)

c)

e)

b)

d)

146. (Enem-MEC) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: <http://www.folha.uol.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que *y* e *x* representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) $y = 4300x$
b) $y = 884905x$
c) $y = 872005 + 4300x$
d) $y = 876305 + 4300x$
e) $y = 880605 + 4300x$

147. (PUC-MG) A tabela a seguir, obtida a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Número de espécies ameaçadas de extinção	239	276	313	350	387	424
Ano	1983	1987	1991	1995	1999	2003

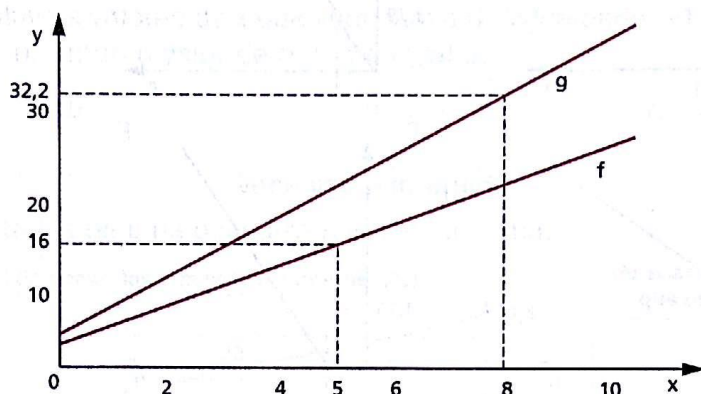
Se mantida, nos anos subsequentes, a tendência linear de crescimento mostrada na tabela, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

a) 461
b) 498
c) 535
d) 572

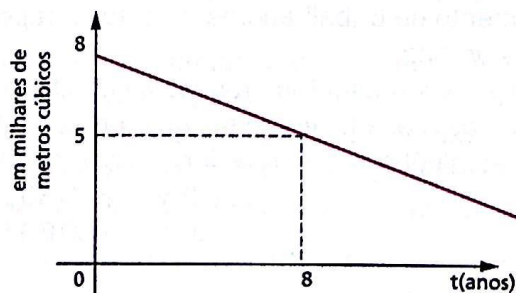
148. (UF-PE) O preço pago por uma corrida de táxi normal consiste de uma quantia fixa de R$ 3,50, a bandeirada, adicionada de R$ 0,25 por cada 100 m percorridos, enquanto o preço pago por uma corrida de táxi especial consiste de uma quantia fixa de R$ 4,20 adicionada de R$ 0,35 por cada 100 m percorridos. Seja f(x) o preço pago, em reais, por uma corrida de x km no táxi normal e g(x) o preço pago, em reais, por uma corrida de x km no táxi especial. Analise as afirmações seguintes referentes a esta situação.

0-0) $f(10) = 28{,}50$ reais

1-1) $g(20) = 74{,}20$ reais

2-2) Os gráficos de f(x) e g(x), para $0 \leqslant x \leqslant 10$, estão esboçados a seguir (são, respectivamente, as semirretas com origem nos pontos (0; 3,5) e (0; 4,2) e com inclinações 2,5 e 3,5).

3-3) Para qualquer corrida, o preço do táxi especial é 30% mais caro que o táxi normal.

4-4) $g(x) - f(x) = 0{,}7 + x$.

149. (Unesp-SP) Ao ser inaugurada, uma represa possui 8 mil m³ de água. A quantidade de água da represa vem diminuindo anualmente. O gráfico mostra que a quantidade de água na represa 8 anos após a inauguração é de 5 mil m³.

Se for mantida essa relação de linearidade entre o tempo e a quantidade de água em m³, determine em quantos anos, após a inauguração, a represa terá 2 mil m³.

a) 16 b) 12 c) 20 d) 18 e) 10

150. (FEI-SP) Para a comemoração de seu aniversário, Márcia resolveu contratar os serviços de um restaurante. Foram passados dois tipos de plano:

Plano I: salão grátis e R$ 50,00 por pessoa.

Plano II: pagamento de R$ 200,00 pelo salão e R$ 45,00 por pessoa.

Os dois planos isentam Márcia de seu próprio consumo, cobrando apenas o consumo de seus convidados.

Assinale a alternativa correta:

a) Se comparecerem 30 convidados no aniversário de Márcia, os valores cobrados pelos planos I e II serão iguais.
b) O plano I será sempre a melhor alternativa para Márcia, independentemente do número de convidados presentes em seu aniversário.
c) O plano II será sempre a melhor alternativa para Márcia, independentemente do número de convidados presentes em seu aniversário.
d) Se comparecerem 50 convidados, o plano I será a melhor opção para Márcia.
e) Se comparecerem mais de 40 convidados, o plano II será a melhor opção para Márcia.

151. (Mackenzie-SP)

Locadora	Taxa fixa	Preço por quilômetro percorrido
X	R$ 50,00	R$ 1,20
Y	R$ 56,00	R$ 0,90

Observando a tabela acima, referente aos valores cobrados por duas locadoras X e Y de veículos, é correto afirmar que,

a) para exatamente 20 quilômetros percorridos, esses valores são iguais.
b) a partir de 20 quilômetros rodados, o custo total em X é menor do que em Y.
c) para X, o custo total é sempre menor.
d) a partir de 15 quilômetros rodados, o custo total em Y é menor do que em X.
e) até 32 quilômetros rodados, o custo total em X é menor do que em Y.

152. (UF-GO) Para fazer traduções de textos para o inglês, um tradutor A cobra um valor inicial de R$ 16,00 mais R$ 0,78 por linha traduzida e um outro tradutor, B, cobra um valor inicial de R$ 28,00 mais R$ 0,48 por linha traduzida. A quantidade mínima de linhas de um texto a ser traduzido para inglês, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor B, é:

a) 16 b) 28 c) 41 d) 48 e) 78

153. (PUC-SP) Sabe-se que em dezembro de 2007 as indústrias X e Y produziram 6000 e 2400 unidades de um mesmo artigo, respectivamente. A partir de então, a cada mês subsequente, X teve sua produção acrescida de 5% da quantidade produzida em dezembro de 2007, enquanto que, da mesma forma, Y teve a sua acrescida em 20% da quantidade produzida na mesma data. Nessas condições, é correto afirmar que a produção de tal artigo em X foi superada pela sua produção em Y a partir de

a) setembro de 2009.
b) novembro de 2009.
c) fevereiro de 2010.
d) março de 2010.
e) maio de 2010.

154. (PUC-MG) Para animar uma festa, o conjunto A cobra uma taxa fixa de R$ 500,00, mais R$ 30,00 por hora. O conjunto B, pelo mesmo serviço, cobra uma taxa fixa de R$ 350,00, mais R$ 80,00 por hora. O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação do conjunto B não fique mais cara que a do primeiro, em horas, é:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

155. (UF-GO) Hoje, são fabricados veículos, denominados *flex*, que podem ser abastecidos com gasolina e/ou com álcool. O preço de um modelo *flex* é R$ 24464,00 e o preço do mesmo veículo convencional é R$ 22000,00. Considere que o consumo usando apenas álcool, no modelo *flex*, seja 30% maior que o consumo de gasolina no veículo convencional ou *flex*, e que o preço do litro de álcool seja 50% menor que o preço do litro de gaso-

lina. Quantos dias, no mínimo, serão necessários para que um taxista recupere o valor pago a mais no modelo *flex*, usando apenas álcool, se ele gasta 40 litros de gasolina todo dia com preço de R$ 2,00 o litro?

a) 65 b) 77 c) 88 d) 90 e) 115

156. (Unesp-SP) Uma companhia telefônica oferece aos seus clientes dois planos diferentes de tarifas. No plano básico, a assinatura inclui 200 minutos mensais de ligações telefônicas. Acima desse tempo, cobra-se uma tarifa de R$ 0,10 por minuto. No plano alternativo, a assinatura inclui 400 minutos mensais, mas o tempo de cada chamada desse plano é acrescido de 4 minutos, a título de taxa de conexão. Minutos adicionais no plano alternativo custam R$ 0,04. Os custos de assinatura dos dois planos são iguais e não existe taxa de conexão no plano básico. Supondo que todas as ligações durem 3 minutos, qual o número máximo de chamadas para que o plano básico tenha um custo menor ou igual ao do plano alternativo?

157. (UF-BA) Considere a proposta elaborada por um cidadão interessado em melhorar o sistema penitenciário: Durante o período da pena, o presidiário tem opção de trabalhar, no próprio presídio, nos dias em que ele escolher, exceto aos sábados e domingos, e cada 3 dias de trabalho reduzem um dia da sua pena. De acordo com a proposta, se um presidiário, condenado a 364 dias de detenção, resolver trabalhar todos os dias possíveis desde o seu ingresso no presídio, terá direito à liberdade t dias antes de completar a pena. Determine t.

158. (FGV-SP) Como consequência da construção de futura estação de Metrô, estima-se que uma casa que hoje vale R$ 280 000,00 tenha um crescimento linear com o tempo (isto é, o gráfico do valor do imóvel em função do tempo é uma reta), de modo que a estimativa de seu valor daqui a 3 anos seja de R$ 325 000,00. Nessas condições, o valor estimado dessa casa daqui a 4 anos e 3 meses será de:

a) R$ 346 000,00
b) R$ 345 250,00
c) R$ 344 500,00
d) R$ 343 750,00
e) R$ 343 000,00

159. (Unicamp-SP) Em uma determinada região do planeta, a temperatura média anual subiu de 13,35 °C em 1995 para 13,8 °C em 2010. Seguindo a tendência de aumento linear observada entre 1995 e 2010, a temperatura média em 2012 deverá ser de

a) 13,83 °C. b) 13,86 °C. c) 13,92 °C. d) 13,89 °C.

160. (UF-CE) A telefonia celular tem tido um crescimento rápido no Brasil nos últimos anos. A tabela abaixo ilustra o número de celulares vendidos por ano:

Ano	Número de celulares
2010	203 milhões
2009	174 milhões
2008	151 milhões

Considerando esta tabela e supondo que a taxa média de crescimento entre 2010 e 2012 seja a mesma que ocorreu entre 2008 e 2010, podemos afirmar que em 2012 o número de celulares no Brasil será de aproximadamente

a) 255 milhões
b) 232 milhões
c) 272 milhões
d) 226 milhões
e) 237 milhões

161. (UF-CE) Um vendedor à procura de emprego recebeu duas propostas de trabalho: a Loja A lhe ofereceu um salário-base de R$ 500,00, acrescido de uma comissão de 3% sobre o total de sua venda mensal; a concorrente Loja B ofereceu R$ 700,00 de salário-base e uma comissão de 2%. Consideradas essas duas propostas, é correto afirmar:

a) Para uma venda mensal de R$ 15500,00, a Loja A remunera o vendedor em R$ 800,00.
b) Indiferentemente de quanto venda por mês, o vendedor terá maior remuneração na Loja A.
c) A partir de R$ 25000,00 em vendas, o vendedor receberá maior remuneração na Loja B.
d) A partir de R$ 20000,00 em vendas, o vendedor receberá maior remuneração na Loja A.
e) A partir de R$ 18000,00 em vendas, o vendedor receberá maior remuneração na Loja A.

162. (UF-CE) Dois veículos, A e B, partem de um ponto de uma estrada, em sentidos opostos e com velocidades constantes de 50 km/h e 70 km/h, respectivamente. Após uma hora, o veículo B retorna e, imediatamente, segue em perseguição ao outro, com velocidade constante igual a 80 km/h. Calcule em quantas horas os carros estarão emparelhados, novamente, a contar do instante da partida.

163. (UF-GO) Um cruzamento tem um semáforo com sensor de velocidade, sendo que a velocidade máxima permitida no local é de 60 km/h. Um veículo se aproxima do cruzamento e, em determinado instante em que está a 50 metros de distância do semáforo, se move com uma velocidade de 30 km/h. Para passar antes de o sinal ficar vermelho, o motorista acelera o veículo, com aceleração constante.
Calcule o tempo necessário para que o motorista percorra esses 50 m e passe pelo semáforo com a velocidade máxima permitida.

164. (UF-ES) Uma fábrica de papel e celulose possui uma plantação de 100000 pés de eucalipto em sua área de plantio comercial. A fábrica pretende explorar essa área, derrubando 2000 pés de eucalipto por dia e, ao mesmo tempo, fazendo o plantio de *m* pés de eucalipto por dia. Dessa forma, a fábrica espera contar com pelo menos 110000 pés de eucalipto no prazo de 360 dias. Para atingir essa meta, o valor mínimo de *m* deverá ser

a) 2025 b) 2026 c) 2027 d) 2028 e) 2029

165. (UF-MG) Dois nadadores, posicionados em lados opostos de uma piscina retangular e em raias adjacentes, começam a nadar em um mesmo instante, com velocidades constantes. Sabe-se que, nas duas primeiras vezes em que ambos estiveram lado a lado, eles nadavam em sentidos opostos: na primeira vez, a 15 m de uma borda e, na segunda vez, a 12 m da outra borda.
Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o comprimento dessa piscina é

a) 21 m. b) 27 m. c) 33 m. d) 54 m.

166. (UF-CE) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - x)(2 + x)$. Então, $f(x) < 0$ quando:

a) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
b) $x \in (-\infty, 1)$
c) $x \in (-2, +\infty)$
d) $x \in (-2, 1)$
e) $x \in (-\infty, +\infty)$

167. (UE-CE) Em uma viagem terrestre, um motorista verifica que, ao passar pelo quilômetro 300 da rodovia, o tanque de seu carro contém 45 litros de combustível e que, ao passar pelo quilômetro 396, o marcador de combustível assinala 37 litros. Como o motorista realiza o trajeto em velocidade aproximadamente constante, o nível de combustível varia linearmente em função da sua localização na rodovia, podendo portanto ser modelado

por uma função do tipo $C(x) = a \cdot x + b$, sendo $C(x)$ o nível de combustível quando o automóvel se encontra no quilômetro x da rodovia.
Baseado nessas informações, é correto afirmar que, com o combustível que possui, o automóvel chegará, no máximo, até o quilômetro
a) 800 b) 840 c) 890 d) 950 e) 990

168. (FGV-SP) No final do ano 2000, o número de veículos licenciados em uma cidade era 400 e, no final de 2008, esse número passou para 560 veículos. Admitindo que o gráfico do número de veículos em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, podemos afirmar que, no final de 2010, o número de veículos será igual a:
a) 600 b) 580 c) 620 d) 610 e) 590

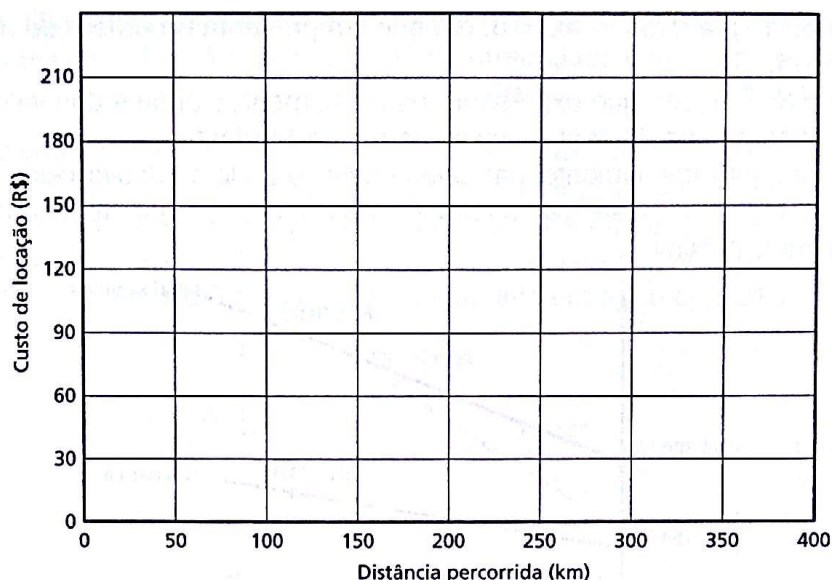
169. (UF-PR) Numa expedição arqueológica em busca de artefatos indígenas, um arqueólogo e seu assistente encontraram um úmero, um dos ossos do braço humano. Sabe-se que o comprimento desse osso permite calcular a altura aproximada de uma pessoa por meio de uma função do primeiro grau.
a) Determine essa função do primeiro grau, sabendo que o úmero do arqueólogo media 40 cm e sua altura era 1,90 m, e o úmero de seu assistente media 30 cm e sua altura era 1,60 m.
b) Se o úmero encontrado no sítio arqueológico media 32 cm, qual era a altura aproximada do indivíduo que possuía esse osso?

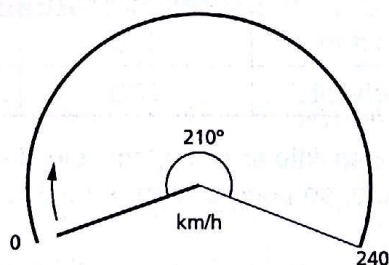
170. (UF-GO) Atualmente o planeta Terra vem presenciando um *boom* populacional humano, decorrente de um processo intenso de crescimento iniciado a mais de um século. A Organização das Nações Unidas (ONU) apresenta previsões da população para 2050 de todos os países e do mundo. A tabela abaixo mostra os valores populacionais em 2007 e as previsões para 2050 dos dois países mais populosos do mundo.

País	População total em 2007 (milhões)	População projetada para 2050 (milhões)
China	1331	1392
Índia	1135	1592

Fonte: State of the World Population — Unleashing the potencial of urban growth — UNFPA (Fundo das Nações Unidas para a População). (Adaptado).

Considere os dados da tabela e admita que, entre 2007 e 2050, as populações de cada país são modeladas por funções do tipo $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes e $f(x)$ é a população do país no ano x, com $x \in \mathbb{N}$. Nessas condições, a partir de que ano a população da Índia será maior que a da China?

171. (Unicamp-SP) Duas locadoras de automóveis oferecem planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R$ 30,00, além de R$ 0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R$ 90,00 com uma franquia de 200 km, ou seja, o cliente pode percorrer 200 km sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos 200 km incluídos na franquia, o cliente deve pagar R$ 0,60.
a) Para cada locadora, represente no gráfico a seguir a função que descreve o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia.

b) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato. Supondo que a locadora Saturno vá manter inalterada a sua taxa fixa, indique qual deve ser seu novo custo por km rodado para que ela, lucrando o máximo possível, tenha o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias.

172. (Unicamp-SP) O velocímetro é um instrumento que indica a velocidade de um veículo. A figura abaixo mostra o velocímetro de um carro que pode atingir 240 km/h. Observe que o ponteiro no centro do velocímetro gira no sentido horário à medida que a velocidade aumenta.

a) Suponha que o ângulo de giro do ponteiro seja diretamente proporcional à velocidade. Nesse caso, qual é o ângulo entre a posição atual do ponteiro (0 km/h) e sua posição quando o velocímetro marca 104 km/h?

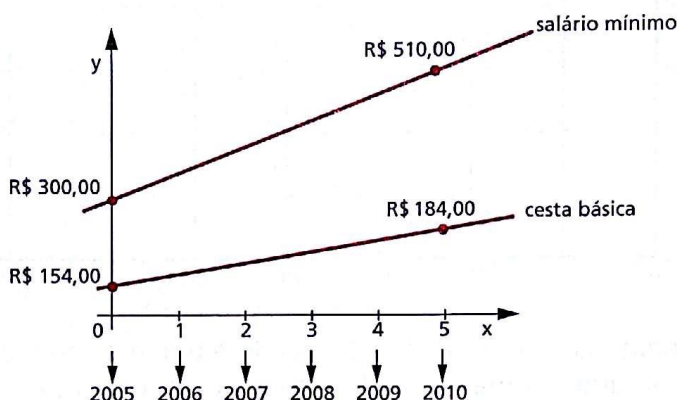
b) Determinado velocímetro fornece corretamente a velocidade do veículo quando ele trafega a 20 km/h, mas indica que o veículo está a 70 km/h quando a velocidade real é de 65 km/h. Supondo que o erro de aferição do velocímetro varie linearmente com a velocidade por ele indicada, determine a função v(x) que representa a velocidade real do veículo quando o velocímetro marca uma velocidade de *x* km/h.

173. (FGV-RJ) Nos últimos anos, o salário mínimo tem crescido mais rapidamente que o valor da cesta básica, contribuindo para o aumento do poder aquisitivo da população. O gráfico a seguir ilustra o crescimento do salário mínimo e do valor da cesta básica na região Nordeste, a partir de 2005.

Suponha que, a partir de 2005, as evoluções anuais dos valores do salário mínimo e dos preços da cesta básica, na região Nordeste, possam ser aproximados mediante funções

polinomiais do 1º grau, $f(x) = ax + b$, em que x representa o número de anos transcorridos após 2005.

a) Determine as funções que expressam os crescimentos anuais dos valores do salário mínimo e dos preços da cesta básica, na região Nordeste.

b) Em que ano, aproximadamente, um salário mínimo poderá adquirir cerca de três cestas básicas, na região Nordeste? Dê a resposta aproximando o número de anos, após 2005, ao inteiro mais próximo.

174. (FGV-SP) Uma empresa vende dois tipos de computadores (*desktops* e *notebooks*), que são fabricados no Rio Grande do Sul e depois transportados para clientes no Rio Grande do Norte. Para transportar os computadores, há dois tipos de caminhão, cujas capacidades de carga encontram-se na tabela abaixo.

Computador	Caminhão A	Caminhão B
Desktop	400	300
Notebook	200	100

Para que o caminhão possa iniciar a viagem, ele deve estar cheio. Assim, um caminhão do tipo A, por exemplo, só poderá partir se estiver carregado exatamente com 400 *desktops* e 200 *notebooks*.

a) Se a empresa deve entregar *d desktops* e *n notebooks*, expresse o número necessário de caminhões do tipo A (x) e do tipo B (y), para efetivar a entrega.

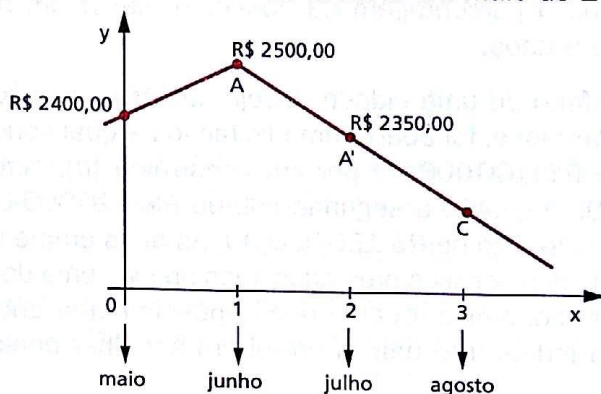
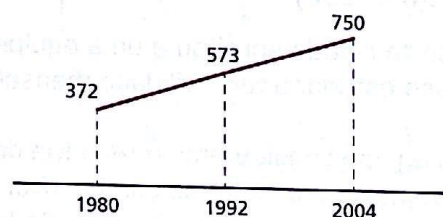
b) Indique o número necessário de caminhões do tipo A e do tipo B, se a empresa entregar 15 mil *desktops* e 7 mil *notebooks*.

c) Os preços unitários de venda dos *desktops* e dos *notebooks* são, respectivamente, R$ 300,00 e R$ 200,00, e a frota de veículos é de 5 caminhões do tipo A e 5 do tipo B. Nessas condições, seria possível à empresa auferir a receita mínima de R$ 4,3 milhões?

175. (UF-CE) Um dono de mercearia vende doces do tipo A e do tipo B, em unidades inteiras. O arrecadado com a venda dos doces pode ser dado, em função das unidades vendidas, pelas expressões $f(a) = \frac{1}{2}a + 5$ e $g(b) = \frac{3}{5}b$, em que a e b representam o número de unidades vendidas de cada um dos tipos de doces (A e B, respectivamente). Para a venda de 10 unidades de cada um dos doces, o valor arrecadado com a venda do doce do tipo A é de R$ 10,00 e o valor arrecadado com a do tipo B é R$ 6,00.

Assinale a alternativa que apresenta o menor número de unidades vendidas para o qual o arrecadado com o tipo A é menor do que o arrecadado com o tipo B.

a) 50 b) 51 c) 60 d) 61

176. (FGV-SP) O gráfico no plano cartesiano expressa a alta dos preços médios de televisores de tela plana e alta definição, do modelo "LCD, *full* HD, 32 polegadas", antes da Copa do Mundo na África do Sul e sua queda após o início. Os pontos A, A' e C são colineares. Demonstre que o preço médio desse modelo em agosto de 2010 foi 8,3% menor, aproximadamente, que o preço médio do mesmo modelo em maio de 2010.

177. (Enem-MEC) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.

Favela tem memória. Época, n. 621, 12 abr. 2010 (adaptado).

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

a) menor que 1 150.
b) 218 unidades maior que em 2004.
c) maior que 1 150 e menor que 1 200.
d) 177 unidades maior que em 2010.
e) maior que 1 200.

178. (UF-MG) Há várias regras para se determinar, com base na dose recomendada para adultos, a dose de um medicamento a ser ministrada a crianças.

Analise estas duas fórmulas:

Regra de Young: $c = \dfrac{x}{x+12}a$

Regra de Cowling: $c = \dfrac{x+1}{24}a$

em que:

- x é a idade da criança, em anos;
- a é a dose do medicamento, em cm^3, para adultos; e
- c é a dose do medicamento, em cm^3, para crianças.

Considerando essas informações,

I. Determine os valores de x para os quais as duas regras levam a doses iguais para crianças.

II. Sabendo que as duas regras são aplicadas no cálculo de doses para crianças entre 2 e 13 anos de idade, determine os valores de x para os quais a regra de Young leva a uma dose maior que a regra de Cowling.

III. Considerado o intervalo de 2 a 13 anos de idade, a diferença entre os valores dados por essas duas regras é máxima quando a criança tem, aproximadamente, 5 anos de idade. Determine a porcentagem da dosagem menor em relação à dosagem maior para a idade de 5 anos.

179. (Enem-MEC) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$
e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

180. (PUC-SP) O prefeito de certa cidade solicitou a uma equipe de trabalho que obtivesse uma fórmula que lhe permitisse estudar a rentabilidade mensal de cada um dos ônibus de uma determinada linha.

Para tal, os membros da equipe consideraram que havia dois tipos de gastos — uma quantia mensal fixa (de manutenção) e o custo do combustível — e que os rendimentos seriam calculados multiplicando-se 2 reais por quilômetro rodado. A tabela abaixo apresenta esses valores para um único ônibus de tal linha, relativamente ao mês de outubro de 2008.

	Outubro
Quantia fixa (reais)	1 150
Consumo de combustível (litros/100 km)	40
Custo de 1 litro de combustível (reais)	4
Rendimentos/km (reais)	2
Distância percorrida (km)	X

Considerando constantes os gastos e o rendimento, a menor quantidade de quilômetros que o ônibus deverá percorrer no mês para que os gastos não superem o rendimento é

a) 2 775 b) 2 850 c) 2 875 d) 2 900 e) 2 925

181. (Unesp-SP) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função $f(h) = 17 \cdot h$, onde h indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função $g(h) = (15,3) \cdot h$. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal.

Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é

a) 2501. b) 2601. c) 2770. d) 2875. e) 2970.

182. (Unicamp-SP) Sejam dadas as funções $f(x) = px$ e $g(x) = 2x + 5$, em que *p* é um parâmetro real.

a) Supondo que $p = -5$, determine para quais valores reais de *x* tem-se $f(x) \cdot g(x) < 0$.

b) Determine para quais valores de *p* temos $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [-8, -1]$.

Função quadrática

183. (UF-RN) Em uma fábrica, o custo diário com matéria-prima, para produzir *x* unidades de um produto, é dado pela equação $C(x) = 10x$. A quantidade de unidades produzidas desse produto, após *t* horas, $0 \leqslant t \leqslant 8$, por sua vez, é dada por $Q(t) = 6t - \frac{1}{2}t^2$.

a) Preencha as tabelas localizadas abaixo de acordo com as expressões das funções Q(t) e C(x) dadas, e explicite os cálculos efetuados.

x	C
	100
16	
18	

t	Q
2	
4	
	18

b) Construa o gráfico da função composta C(Q(t)), que corresponde ao custo em função das horas (*t*).

184. (UF-PE) Para quantos valores inteiros de x o número $\frac{x^3 + 36}{x^2}$ é inteiro?

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

185. (PUC-RJ) Considere a equação: $\frac{8x - 1}{x + 1} = mx$

a) Quantas raízes reais a equação admite para $m = 1$?

b) Para quais valores reais de *m* a equação admite pelo menos uma raiz real?

186. (Fuvest-SP) A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Então, $m + n$ é igual a:

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

187. (FGV-SP) Se a média aritmética entre dois números é 15 e sua média geométrica é 12, então, uma equação cujas duas raízes reais sejam esses dois números é

a) $2x^2 - 60x + 37 = 0$.
b) $x^2 - 30x + 120 = 0$.
c) $x^2 - 30x + 144 = 0$.
d) $x^2 + 6x + 120 = 0$.
e) $2x^2 + 12x - 15 = 0$.

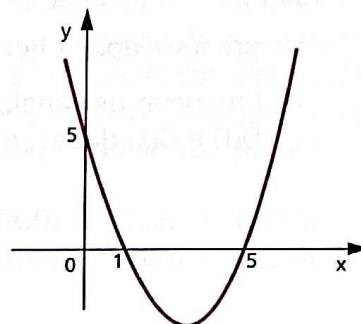
188. (FGV-SP) As duas raízes da equação $x^2 - 63x + k = 0$ na incógnita x são números inteiros e primos. O total de valores distintos que k pode assumir é:

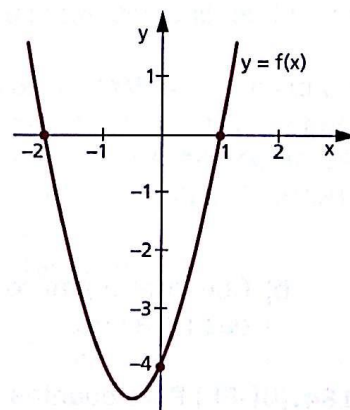
a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

189. (FGV-SP) Na equação $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-k}{x-6}$, na variável x, k é um parâmetro real. O produto dos valores de k para os quais essa equação não apresenta solução real em x é

a) 10. b) 12. c) 20. d) 24. e) 30.

190. (UF-GO) A figura ao lado representa o gráfico de uma função polinomial de grau 2.
Dos pontos a seguir, qual também pertence ao gráfico?

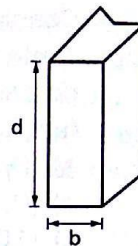
a) (3, −2)
b) (3, −4)
c) (4, −2)
d) (4, −4)
e) (2, −4)

191. (Unesp-SP) A expressão que define a função quadrática f(x), cujo gráfico está esboçado, é:

a) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.
b) $f(x) = x^2 + 2x - 4$.
c) $f(x) = x^2 + x - 2$.
d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$.

192. (UF-PR) Uma parábola é o gráfico de uma função da forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

a) Encontre a função cujo gráfico é a parábola que contém os pontos P = (−1, 2), Q = (1, 2) e R = (2, 5). Sugestão: utilize os pontos dados para construir um sistema linear.
b) Existe uma parábola que contém os pontos P = (−1, −1), Q = (1, 3) e R = (2, 5)? Justifique.

193. (UF-RN) O gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ é

a) uma parábola com abertura voltada para cima.
b) uma parábola com abertura voltada para baixo.
c) uma hipérbole com uma parte no primeiro quadrante e outra no terceiro quadrante.
d) uma hipérbole com uma parte no segundo quadrante e a outra no quarto quadrante.

194. (Enem-MEC) A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura (b) e ao quadrado da altura (d), conforme a figura. A constante de proporcionalidade *k* varia de acordo com o material utilizado na sua construção.

Considerando-se S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

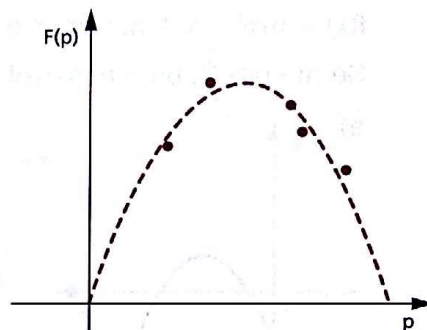
a) $S = k \cdot b \cdot d$

b) $S = b \cdot d^2$

c) $S = k \cdot b \cdot d^2$

d) $S = \dfrac{k \cdot b}{d^2}$

e) $S = \dfrac{k \cdot d^2}{b}$

195. (UF-PA) O faturamento de uma empresa na venda de certo produto pode ser modelado por uma função quadrática, do tipo $F(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$, sendo *p* o preço de venda praticado. A figura ao lado apresenta os faturamentos obtidos em função do preço e o gráfico da função quadrática que aproxima esse faturamento.

Sobre os coeficientes da função quadrática, é correto afirmar que

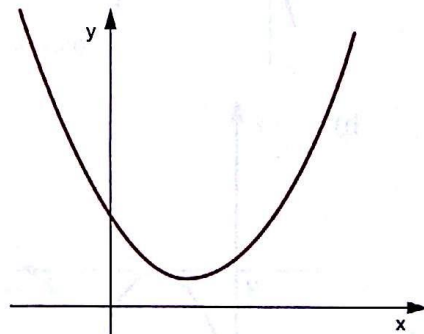
a) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$.

b) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$.

c) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$.

d) $a < 0$, $b < 0$ e $c = 0$.

e) $a < 0$, $b > 0$ e $c = 0$.

196. (UFF-RJ) A figura ao lado é o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, representado em um sistema de coordenadas retangulares.

Pode-se afirmar que:

a) $a > 0, b > 0, c < 0$

b) $a > 0, b < 0, c < 0$

c) $a > 0, b > 0, c > 0$

d) $a > 0, b < 0, c > 0$

e) $a < 0, b < 0, c > 0$

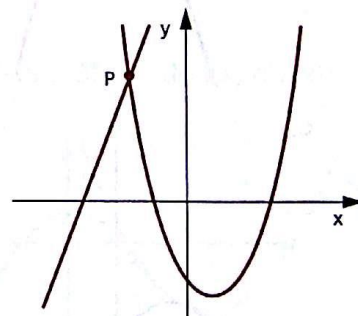
197. (Mackenzie-SP) Na figura, estão representados os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = 3x + 11$. A soma da abscissa do ponto P com o valor mínimo de f(x) é:

a) 1,5

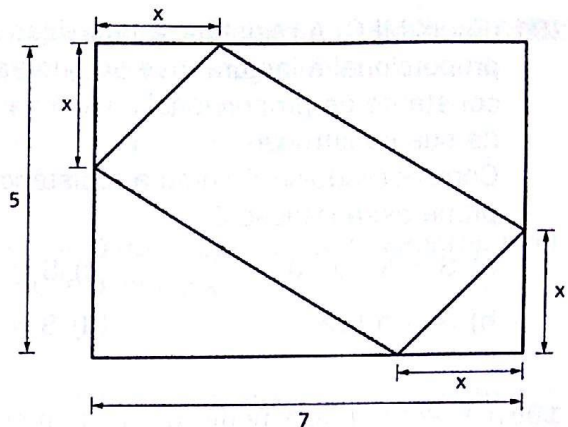
b) −5

c) −2

d) −6

e) 0,5

198. (UF-RS) A partir de dois vértices opostos de um retângulo de dimensões 7 e 5, marcam-se quatro pontos que distam *x* de cada um desses vértices. Ligando-se esses pontos, como indicado na figura a seguir, obtém-se um paralelogramo P.

Considere a função *f*, que a cada *x* pertencente ao intervalo (0, 5) associa a área f(x) do paralelogramo P. O conjunto imagem da função *f* é o intervalo

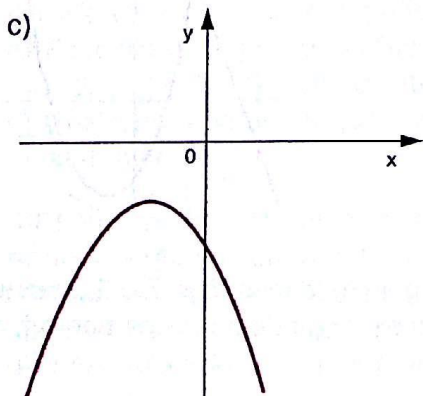
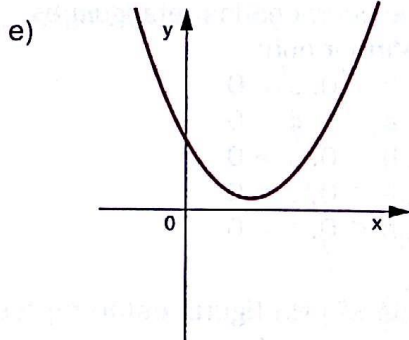
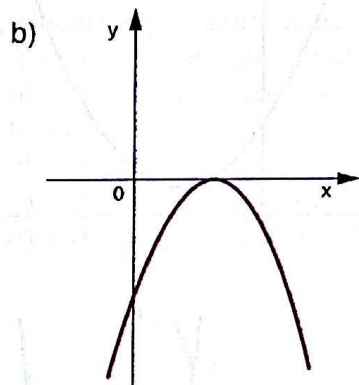
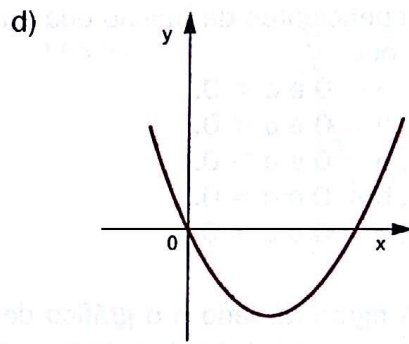
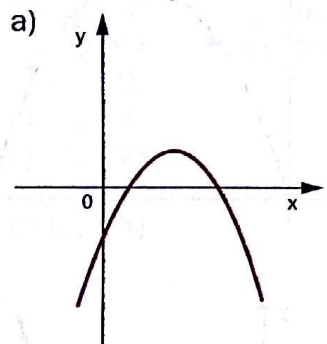
a) (0, 10].
b) (0, 18).
c) (10, 18].
d) [0, 10].
e) (0, 18].

199. (U. F. São Carlos-SP) Considere que a representação gráfica da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = mx^2 - x + n$, com *m* e *n* reais, é uma parábola com ordenada do vértice maior que *n*. Se $m \cdot n > \frac{1}{4}$, uma possível representação gráfica de *f* é:

a)

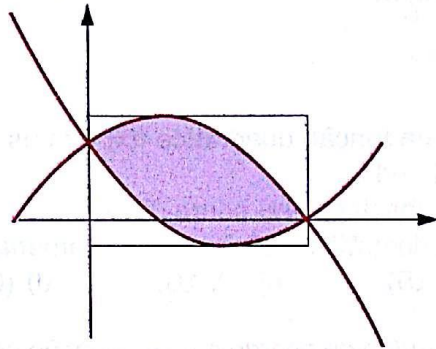
b)

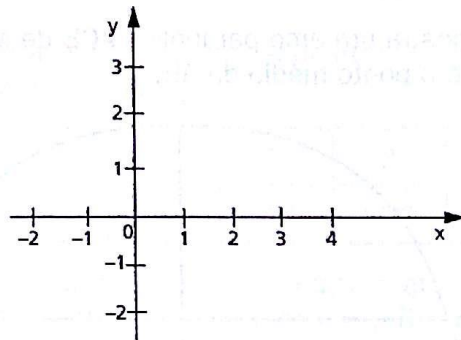
c)

d)

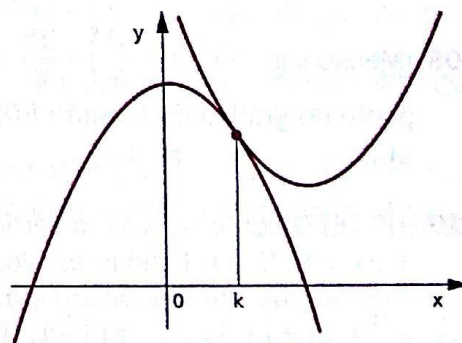
e)

200. (PUC-MG) Uma agência de turismo, que promove excursões em um parque florestal, atrai 40 clientes quando cobra R$ 50,00 por um passeio de 4 horas. Dados estatísticos mostram que, para cada redução de R$ 5,00 nesse preço, há um aumento de 10 no número de pessoas que participam de um passeio. Com base nessas informações, pode-se estimar que o preço por pessoa para que essa empresa obtenha a receita máxima com um desses passeios é:

a) R$ 30,00 b) R$ 35,00 c) R$ 40,00 d) R$ 45,00

201. (UF-PE) As parábolas com equações $y = -x^2 + 2x + 3$ e $y = x^2 - 4x + 3$ estão esboçadas a seguir. Qual a área do menor retângulo, com lados paralelos aos eixos, que contém a área colorida, limitada pelos gráficos das parábolas?

202. (UF-PR) Considere as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-2)$.

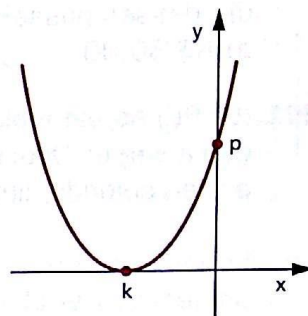
a) Esboce o gráfico de f(x) e g(x) no sistema cartesiano abaixo.

b) Calcule as coordenadas (x, y) dos pontos de interseção dos gráficos de f(x) e g(x).

203. (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 4x + m$, que se interceptam em um único ponto de abscissa *k*. O valor de k + m é

a) 8
b) 6,5
c) 5,5
d) 7
e) 6

204. (UF-PA) O vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto $(-2, 3)$. Sabendo que 5 é a ordenada onde a curva corta o eixo vertical, podemos afirmar que

a) $a > 1, b < 1$ e $c < 4$
b) $a > 2, b > 3$ e $c > 4$
c) $a < 1, b < 1$ e $c > 4$
d) $a < 1, b > 1$ e $c > 4$
e) $a < 1, b < 1$ e $c < 4$

205. (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (8 - m)$.
O valor de $k + p$ é

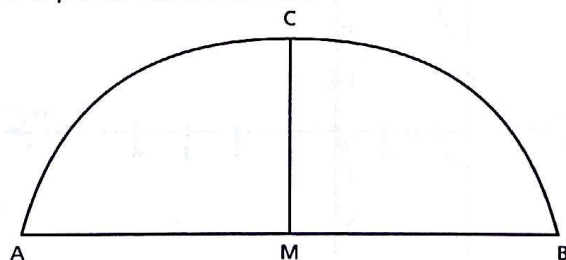
a) -2
b) 2
c) -1
d) 1
e) 3

206. (FGV-SP) O gráfico de uma função quadrática f(x) tem as seguintes características:
- O vértice é o ponto $(4, -1)$.
- Intercepta o eixo das abscissas no ponto $(5, 0)$.

O ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é:

a) (0, 14) b) (0, 15) c) (0, 16) d) (0, 17) e) (0, 18)

207. (UF-PA) Um arco foi construído de acordo com a equação $h(x) = x(10 - x)$, para $0 \leq x \leq 10$, em que *h* é a função altura. O valor da altura máxima do arco é

a) inferior a 10.
b) igual ou superior a 10 e inferior a 15.
c) igual ou superior a 15 e inferior a 25.
d) igual ou superior a 25 e inferior a 30.
e) igual ou superior a 30.

208. (Unifesp-SP) A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. M é o ponto médio de AB.

A altura do arco em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de M, é

a) 15. b) 14. c) 13. d) 12. e) 10.

209. (Mackenzie-SP) Se $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{4}$ é o máximo de uma função quadrática *f* e se $(-1, 0)$ é um ponto do gráfico de *f*, então f(0) é igual a:

a) 5 b) 4 c) 3 d) -1 e) -2

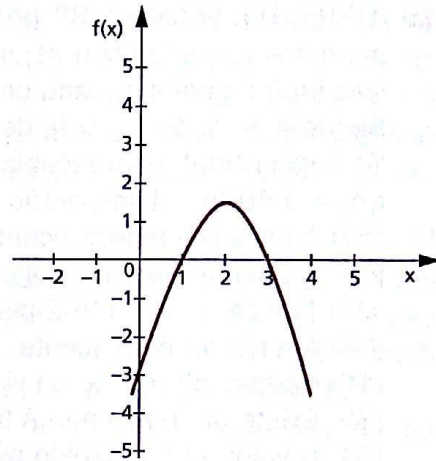
210. (UF-CE) O ponto (x_v, y_v) é o vértice do gráfico da função quadrática dada por $f(x) = -x^2 + 2x + 5$. Se I e J são intervalos disjuntos que contêm, respectivamente, x_v e y_v, assinale a alternativa em que os intervalos podem representar I e J, nesta ordem.

a) [0, 3] e [3, 7] b) [−1, 0] e [2, 4] c) [0, 3] e [4, 5] d) [1, 3] e [5, 7]

211. (UF-CE) João escreveu o número 10 como soma de duas parcelas inteiras positivas, cujo produto é o maior possível. O valor desse produto é:

a) 9. b) 16. c) 21. d) 25. e) 27.

212. (FEI-SP) A figura ao lado representa o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Podemos afirmar que:

a) $a > 0$
b) $\Delta < 0$
c) $c < 0$
d) o vértice da parábola é o ponto (2, 0)
e) $b^2 = 4ac$

213. (FEI-SP) Considere $f(x) = x^2 - 5x + 6$. O conjunto imagem dessa função é:

a) $Im(f) = \mathbb{R}$
b) $Im(f) = [2, 3]$
c) $Im(f) = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$
d) $Im(f) = [3, +\infty[$
e) $Im(f) = \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$

214. (FGV-SP) A função quadrática $f(x) = 16x - x^2$ definida no domínio dado pelo intervalo [0, 7] tem imagem máxima igual a:

a) 64 b) 63,5 c) 63 d) 62,5 e) 62

215. (Unifesp-SP) A tabela mostra a distância s em centímetros que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em *t* segundos.

t	0	1	2	3	4
s	0	32	128	288	512

A distância s é função de *t* dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde *a*, *b*, *c* são constantes. A distância *s* em centímetros, quando t = 2,5 segundos, é igual a

a) 248. b) 228. c) 208. d) 200. e) 190.

216. (UF-MS) Uma partícula tem sua trajetória retilínea definida pela função que relaciona a distância S, em metros, da partícula a um ponto fixo e o tempo *t*, em segundos, dada por: $S(t) = 45 + 40t - 5t^2$

Determine quantos metros foram percorridos entre 3 segundos e 6 segundos a partir do instante inicial zero.

217. (UF-BA) Sabendo que os gráficos das funções quadráticas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 - bx + c$ se intersectam em um ponto do eixo *x* e em um ponto do eixo *y*, determine o valor de b^4c.

218. (Fatec-SP) Considere as funções *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = -x^2 + px$ e $g(x) = k$, com *p* e *k* constantes reais. Representando-as graficamente no sistema de coordenadas

cartesianas ortogonais, obtém-se a reta da função g tangenciando a parábola da função f, no vértice de abscissa 3. Nestas condições, o valor de k é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

219. (UF-BA) Um grupo de 90 pessoas, interessadas em viajar de férias, contata uma companhia aérea que faz a seguinte proposta: se o número de pessoas que confirmarem a viagem for igual a n, cada uma delas pagará o valor $p(n) = 1600 - 10n$ pela passagem. Sendo $A = \{1, 2, \dots, 90\}$, define-se a função $p: A \to \mathbb{R}$.
Se o valor total a ser recebido pela companhia é dado pela função $r: A \to \mathbb{R}$, definida por $r(n) = 1600n - 10n^2$, então pode-se afirmar:

(01) A função p é decrescente.
(02) O valor de cada passagem é um número inteiro pertencente ao intervalo $[700, 1590]$.
(04) Tem-se $p(n) = 1352$ para algum $n \in A$.
(08) A função r é crescente.
(16) Cada confirmação de viagem provoca um acréscimo constante no valor de r.
(32) Existe um único $n \in A$ tal que $r(n) = 63\,000$.
(64) O valor total recebido pela companhia será máximo, se $n = 80$.

220. (Fuvest-SP) Para cada número real m, considere a função quadrática $f(x) = x^2 + mx + 2$. Nessas condições:

a) Determine, em função de m, as coordenadas do vértice da parábola de equação $y = f(x)$.
b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a imagem de f contém o conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 1\}$.
c) Determine o valor de m para o qual a imagem de f é igual ao conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 1\}$ e, além disso, f é crescente no conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$.
d) Encontre, para a função determinada pelo valor de m do item c) e para cada $y \geqslant 2$, o único valor de $x \geqslant 0$ tal que $f(x) = y$.

221. (Fatec-SP) Seja f a função quadrática, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (k + 3) \cdot (x^2 + 1) + 4x$, na qual k é uma constante real.
Logo, $f(x) > 0$, para todo x real, se, e somente se,

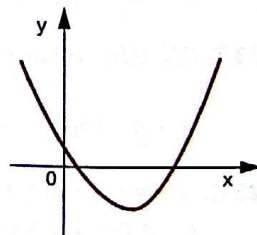
a) $k > -3$.
b) $k > -1$.
c) $-3 < k < 1$.
d) $k < 1$ ou $k > 5$.
e) $k < -5$ ou $k > -1$.

222. (PUC-RJ) Qual o maior valor de M para o qual a desigualdade $x^2 - 8x + 15 \leqslant M$ não admite solução real negativa?

a) −1 b) 0 c) 3 d) 5 e) 15

223. (UF-BA) Com base nos conhecimentos sobre funções, é correto afirmar:

(01) Se a função afim $m(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é crescente, então $a > 0$ ou $x > -\frac{b}{a}$.
(02) Se a função afim $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é decrescente, então a função é negativa para todo $x < -\frac{b}{a}$.
(04) Se a função quadrática $n(x) = ax^2 + bx + c$ é par, então $b = 0$.
(08) Se a figura ao lado representa um esboço do gráfico da função quadrática $r(x) = ax^2 + bx + c$, então b é um número real negativo.

(16) Se a função quadrática $h(x) = ax^2 + 4x + c$ admite valor máximo 1 no ponto de abscissa −2, então $c - a = 4$.

(32) Se a função real $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, com $a \neq 0$, possui apenas duas raízes reais positivas distintas, entre suas raízes, então a função quadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$ possui duas raízes reais positivas distintas.

224. (UFF-RJ) O histórico desempenho dos atletas brasileiros no PAN-2007 (54 de ouro, 40 de prata e 67 de bronze, total de 161 medalhas) superou os objetivos traçados pelo Comitê Olímpico Brasileiro (COB). Embora tenha superado Cuba (59 de ouro, 35 de prata e 41 de bronze, total de 135 medalhas) no total de medalhas, o Brasil terminou os Jogos em terceiro lugar no quadro, atrás de Cuba (segundo) e Estados Unidos (primeiro lugar, com 237 medalhas).

Adaptado de http://torcida2007.globo.com/torcida2007/noticias/noticias_interna.asp?id=6166.

Não satisfeita com o terceiro lugar do Brasil na competição, uma professora de matemática sugeriu que a classificação geral deveria ser feita pelo total de pontos obtido por cada equipe segundo o seguinte critério: cada medalha de bronze valeria 1 ponto, a medalha de prata q pontos e a medalha de ouro q^2 pontos, sendo q, obviamente, maior que 1. Considere então B o conjunto que contém todos os valores reais possíveis de q tal que, segundo o critério da professora, o Brasil ficaria na frente de Cuba no PAN-2007.
Assim sendo, pode-se afirmar que:

a) $B \supset]-2, 3[$
b) $B = \varnothing$
c) $B =]3, +\infty[$
d) $B \subset]1, 3[$
e) $B =]1, +\infty[$

225. (UF-ES) Um restaurante de comida a quilo, que normalmente cobra R$ 25,00 pelo quilo de comida, está fazendo uma promoção:

"Quem consome x gramas de comida ganha um desconto de $\frac{x}{10}$ por cento".

Esse desconto vale para quem consumir até 600 gramas de comida. Consumo superior a 600 gramas dá direito a um desconto fixo de 60%.

a) Determine o valor a ser pago por quem consome 400 gramas de comida e por quem consome 750 gramas.
b) André, que ganhou o desconto máximo de 60%, consumiu 56 gramas a mais que Taís. No entanto, ambos pagaram a mesma quantia. Determine a quantidade de gramas que cada um deles consumiu.
c) Trace o gráfico que representa o valor a pagar (em reais) em função do peso de comida (em gramas). Marque no gráfico os pontos que representam a situação do item anterior.

226. (Unesp-SP) Na Volta Ciclística do Estado de São Paulo, um determinado atleta percorre um declive de rodovia de 400 metros e a função

$$d(t) = 0{,}4t^2 + 6t$$

fornece, aproximadamente, a distância em metros percorrida pelo ciclista, em função do tempo t, em segundos. Pode-se afirmar que a velocidade média do ciclista (isto é, a razão entre o espaço percorrido e o tempo) nesse trecho é

a) superior a 15 m/s.
b) igual a 17 m/s.
c) inferior a 14 m/s.
d) igual a 15 m/s.
e) igual a 14 m/s.

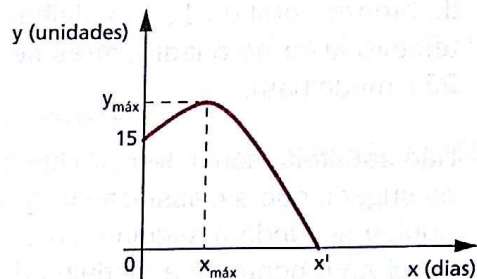
227. (UF-PR) Um determinado tipo de canhão para artilharia antiaérea dispara projéteis que descrevem uma trajetória parabólica. Após vários disparos, um grupo de engenheiros militares constatou que, desprezando-se a resistência do ar, os projéteis lançados a partir do solo descrevem uma parábola de equação $y = 16k^2x - kx^2$, sendo x e y dados em

metros e k um fator positivo relacionado à inclinação que pode ser ajustado diretamente no canhão.

a) Que valor se deve atribuir a k para que um projétil lançado por esse canhão atinja o solo a exatamente 400 m do ponto de disparo?

b) Qual é o menor valor que se deve atribuir a k para que um projétil lançado por esse canhão atinja a altura de 1000 m?

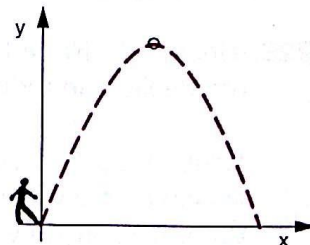
228. (U.F. São Carlos-SP) Um empreendimento imobiliário foi divulgado em ampla campanha publicitária encerrada no domingo, com venda, nesse dia, de 15 unidades. As vendas diárias, em função do número de dias após o encerramento da campanha, foram calculadas segundo a função $y(x) = -x^2 + 2x + 15$, onde x é o número de dias. Indique em quais dias da semana seguinte ao encerramento da campanha as vendas atingiram o valor máximo e foram reduzidas a zero, respectivamente.

a) 2ª feira e 6ª feira.
b) 2ª feira e sábado.
c) 3ª feira e 6ª feira.
d) 3ª feira e sábado.
e) 4ª feira e domingo.

229. (FEI-SP) Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, ela atinge a altura h (em metros), dada por $h(t) = 40t - 5t^2$. A altura máxima atingida pela pedra e o instante t em que isto ocorre são, respectivamente:

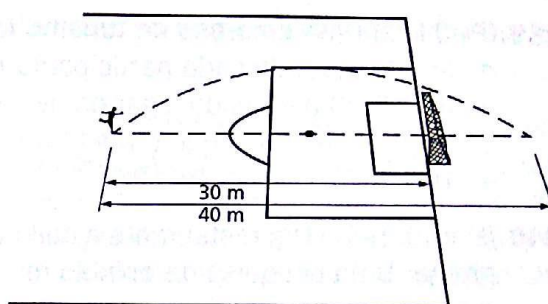
a) 80 m e 3 s.
b) 60 m e 3 s.
c) 60 m e 4 s.
d) 80 m e 4 s.
e) 100 m e 4 s.

230. (Unesp-SP) A altura $y(t)$ de um projétil, lançado a 15 m do solo, numa região plana e horizontal, com velocidade vertical inicial 10 m/s, é dada por $y(t) = -5t^2 + 10t + 15$, considerando $t = 0$ como o instante do lançamento. A posição horizontal $x(t)$ é dada por $x(t) = 10\sqrt{3}t$. Determine a altura máxima e o alcance (deslocamento horizontal máximo) que o projétil atinge, considerando que ele caia no solo.

231. (UF-AM) Um goleiro chuta uma bola cuja trajetória descreve a parábola $y = -4x^2 + 24x$, onde x e y são medidas em metros. Nestas condições, a altura máxima, em metros, atingida pela bola é:

a) 36
b) 34
c) 30
d) 28
e) 24

232. (UF-BA) Em um terreno plano horizontal, está fixado um mastro vertical com 13,5 metros de altura. Do topo do mastro, é lançado um projétil, descrevendo uma trajetória de modo que sua altura, em relação ao terreno, é uma função quadrática de sua distância à reta que contém o mastro. O projétil alcança a altura de 16 metros, quando essa distância é de 3 metros, e atinge o solo, quando a distância é de 27 metros.
Determine, em metros, a altura máxima alcançada pelo projétil.

233. (Unicamp-SP) Um jogador de futebol chuta uma bola a 30 m do gol adversário. A bola descreve uma trajetória parabólica, passa por cima da trave e cai a uma distância de 40 m de sua posição original. Se, ao cruzar a linha do gol, a bola estava a 3 m do chão, a altura máxima por ela alcançada esteve entre

a) 4,1 e 4,4 m.
b) 3,8 e 4,1 m.
c) 3,2 e 3,5 m.
d) 3,5 e 3,8 m.

234. (FGV-SP) O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p = 300 - 0{,}75x$. A receita máxima possível por viagem é:

a) R$ 30 000,00
b) R$ 29 700,00
c) R$ 29 900,00
d) R$ 29 600,00
e) R$ 29 800,00

235. (UF-PI) Um relatório sobre as operações de uma indústria revelou que, a um preço p, não superior a R$ 200,00, a mesma consegue vender $800 - 4p$ artigos semanais. Nesse relatório, consta que o custo de produção de x artigos é dado através do modelo linear $200 + 10x$ reais. Sendo assim, qual o preço p que a indústria deve cobrar para que o seu lucro seja máximo?

a) R$ 85,00
b) R$ 105,00
c) R$ 110,00
d) R$ 150,00
e) R$ 200,00

236. (UF-GO) Um supermercado vende 400 pacotes de 5 kg de uma determinada marca de arroz por semana. O preço de cada pacote é R$ 6,00, e o lucro do supermercado, em cada pacote vendido, é de R$ 2,00. Se for dado um desconto de x reais no preço do pacote de arroz, o lucro por pacote terá uma redução de x reais, mas, em compensação, o supermercado aumentará sua venda em $400x$ pacotes por semana. Nestas condições, calcule:

a) O lucro desse supermercado em uma semana, caso o desconto dado seja de R$ 1,00.
b) O preço do pacote de arroz para que o lucro do supermercado seja máximo, no período considerado.

237. (UF-PA) Um cidadão, ao falecer, deixou uma herança de R$ 200 000,00 para ser distribuída, de maneira equitativa, entre os seus x filhos. No entanto, três desses filhos renunciaram às suas respectivas partes nessa herança, fazendo com que os demais $x - 3$ filhos, além do que receberiam normalmente, tivessem um adicional de R$ 15 000,00 em suas respectivas partes dessa herança. Portanto, o número x de filhos do referido cidadão é

a) 8
b) 10
c) 5
d) 4
e) 7

238. (UF-MA) Numa empresa, o salário de um grupo de empregados é R$ 380,00, mais uma quantia variável correspondente a $\frac{1}{5}$ da produção de um dos produtos da empresa, cuja produção foi estimada para daqui a t anos pela função $p(t) = 50t^2 - 50t + 100$. Daqui a quantos anos o salário deste grupo de funcionários aumentará 50% em relação ao valor atual?

a) 2 anos
b) 4 anos
c) 8 anos
d) 6 anos
e) 5 anos

239. (PUC-MG) Uma empresa de turismo fretou um avião com 200 lugares para uma semana de férias, devendo cada participante pagar R$ 500,00 pelo transporte aéreo, acrescidos de R$ 10,00 para cada lugar do avião que ficasse vago. Nessas condições, o número de passagens vendidas que torna máxima a quantia arrecadada por essa empresa é igual a:

a) 100 b) 125 c) 150 d) 180

240. (Unicamp-SP) Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo corretas as informações da pesquisa e definindo a receita do restaurante como o valor total pago pelos clientes.

a) Em que caso a receita do restaurante será maior: se o preço subir para R$ 18,00/kg ou para R$ 20,00/kg?
b) Formule matematicamente a função f(x), que fornece a receita do restaurante como função da quantia x, em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição.
c) Qual deve ser o preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

241. (UF-PE) Um grupo de estudantes participará de uma excursão. Se participarem 60 estudantes, o preço individual da excursão será de R$ 200,00 e, para cada estudante que desistir, o preço individual dos participantes aumentará R$ 5,00; por exemplo, se dois estudantes desistirem, o preço da excursão será de R$ 210,00. Qual o valor máximo que o organizador da excursão poderá arrecadar com os valores pagos pelos participantes da excursão?

a) R$ 12 400,00
b) R$ 12 500,00
c) R$ 12 600,00
d) R$ 12 650,00
e) R$ 12 700,00

242. (Unicamp-SP) Uma empresa fabricante de aparelhos que tocam músicas no formato MP3 efetuou um levantamento das vendas dos modelos que ela produz. Um resumo do levantamento é apresentado na tabela abaixo.

Modelo	Preço (R$)	Aparelhos vendidos (milhares)
A	150	78
B	180	70
C	250	52
D	320	36

a) Em face dos ótimos resultados obtidos nas vendas, a empresa resolveu sortear um prêmio entre seus clientes. Cada proprietário de um aparelho da empresa receberá um cupom para cada R$ 100,00 gastos na compra, não sendo possível receber uma fração de cupom. Supondo que cada proprietário adquiriu apenas um aparelho e que todos os proprietários resgataram seus cupons, calcule o número total de cupons e a probabilidade de que o prêmio seja entregue a alguma pessoa que tenha adquirido um aparelho com preço superior a R$ 300,00.
b) A empresa pretende lançar um novo modelo de aparelho. Após uma pesquisa de mercado, ela descobriu que o número de aparelhos a serem vendidos anualmente e o preço do novo modelo estão relacionados pela função $n(p) = 115 - 0,25p$, em que n é o número de aparelhos (em milhares) e p é o preço de cada aparelho (em reais).

Determine o valor de p que maximiza a receita bruta da empresa com o novo modelo, que é dada por $n \times p$.

243. (Unesp-SP) Um grupo de x estudantes se juntou para comprar um computador portátil (*notebook*) que custa R$ 3 250,00. Alguns dias depois, mais três pessoas se juntaram ao grupo, formando um novo grupo com $x + 3$ pessoas. Ao fazer a divisão do valor do computador pelo número de pessoas que estão compondo o novo grupo, verificou-se que cada pessoa pagaria R$ 75,00 a menos do que o inicialmente programado para cada um no primeiro grupo. O número de x de pessoas que formavam o primeiro grupo é:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

244. (UF-GO) Todos os funcionários de uma empresa irão contribuir igualmente para fazer um bolão da Mega Sena, cujo valor é R$ 2 700,00. Na hora de recolher o dinheiro para fazer o bolão, dois funcionários da empresa desistiram de participar e, com isso, a cota que cada participante deveria pagar sofreu um aumento de R$ 8,00, para manter o valor total do bolão. Dessa forma, calcule o número total de funcionários dessa empresa.

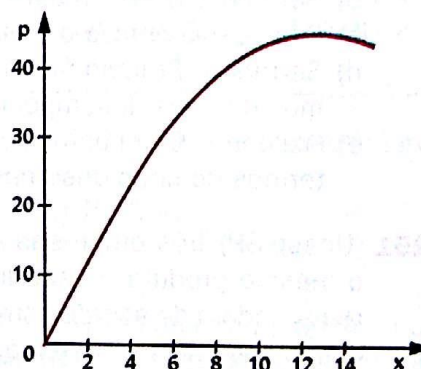
245. (Mackenzie-SP) Vinte apostadores compareceram a uma casa lotérica para participar de um "bolão", cabendo a cada um pagar ou um mínimo de R$ 10,00, ou um valor maior, mas igual para todos, múltiplo de R$ 5,00; entretanto, para cada R$ 5,00 de aumento no valor da aposta, haverá a saída de um apostador. Dentre os valores abaixo, para se fazer um jogo de R$ 525,00, cada apostador deverá participar em reais, com a quantia de

a) 45 b) 50 c) 25 d) 35 e) 105

246. (UF-PE) Uma confeitaria faz a seguinte promoção: Compre x doces, com $60 \leq x \leq 140$, e ganhe $\left(\frac{x}{2}\right)\%$ de desconto. Se um cliente pretende comprar 72 doces, quantos doces adicionais ele poderia comprar, pagando o mesmo preço?

a) 50 b) 52 c) 54 d) 56 e) 58

247. (UF-PE) Uma padaria oferece a seguinte promoção: "Compre x kg de pão e ganhe $(4x)\%$ de desconto no preço a ser pago", (para $0 < x < 15$). Sem desconto, o preço do quilo de pão é de R$ 7,00. Na ilustração ao lado, temos o preço p pago, em reais, em termos da quantidade de pão comprada x, em kg.

Se um consumidor vai comprar 11 kg de pão, pagando o preço sem desconto, que outra quantidade de pão, com desconto, ele poderia comprar, pagando a mesma quantia?

a) 13,2 kg
b) 13,4 kg
c) 13,6 kg
d) 13,8 kg
e) 14,0 kg

248. (FGV-SP) Um número real x, $10 \leq x \leq 110$, é tal que $(x - 10)\%$ da diferença entre 14 e x, nessa ordem, é igual ao número real y. Nessas condições, o valor máximo que y pode assumir é

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{1}{21}$ c) $\frac{1}{24}$ d) $\frac{1}{25}$ e) $\frac{1}{27}$

249. (UE-RJ) O peso P de um objeto, a uma altura *h* acima do nível do mar, satisfaz a seguinte equação:

$$P = \left(\frac{r}{h+r}\right)^2 \cdot P_0$$

P_0: peso do objeto ao nível do mar
r: raio da Terra
Sabe-se que P equivale a 81% de P_0 quando o objeto se encontra a uma altura h_1. Calcule, em função de *r*, o valor de h_1.

250. (UFF-RJ) A tabela a seguir mostra as estatísticas de três times num torneio de futebol.

Time	Gols sofridos (GS)	Finalizações em gol (FG)	Gols a favor (GF)
Campestre	2	48	12
Praiano	6	50	13
Serrano	3	35	9

Não satisfeito com o resultado do torneio, João criou, para cada time, a função quadrática:

$$P(x) = \frac{1}{2}\left[(x - GS)^2 + 2FG + (x - GF)^2\right] \in \mathbb{R}$$

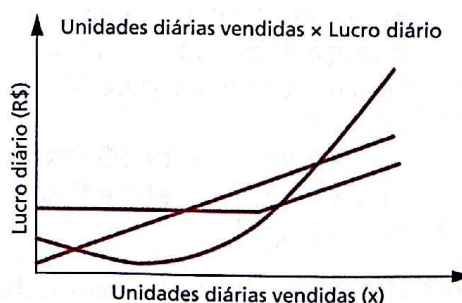
substituindo GS, FG e GF pelos valores correspondentes na tabela.
Segundo o critério de João, o desempenho de cada time é representado pelo valor mínimo de P(x), de modo que, quanto maior o valor mínimo de P(x), melhor será o desempenho do time correspondente.
Considerando a função quadrática correspondente a cada time da tabela e o critério de João, pode-se afirmar que:

a) Praiano obteve o melhor desempenho;
b) Serrano obteve o melhor desempenho;
c) Campestre obteve o melhor desempenho;
d) Serrano e Praiano ficam com o segundo e terceiro lugares, respectivamente, em termos de seus desempenhos;
e) Praiano e Campestre ficam com o segundo e terceiro lugares, respectivamente, em termos de seus desempenhos.

251. (Unesp-SP) Três empresas A, B e C comercializam o mesmo produto e seus lucros diários (L(x)), em reais, variam de acordo com o número de unidades diárias vendidas (x) segundo as relações:

Empresa A: $L_A(x) = \frac{10}{9}x^2 - \frac{130}{9}x + \frac{580}{9}$

Empresa B: $L_B(x) = 10x + 20$

Empresa C: $L_C(x) = \begin{cases} 120, & \text{se } x < 15 \\ 10x - 30, & \text{se } x \geq 15 \end{cases}$

Determine em que intervalo deve variar o número de unidades diárias vendidas para que o lucro da empresa B supere os lucros da empresa A e da empresa C.

252. (UE-CE) Em um planeta de atmosfera rarefeita, um vulcão em erupção expele para fora de sua cratera uma pedra incandescente localizada 100 metros abaixo da superfície. Sabendo que a pedra demora 10 segundos para atingir a altura máxima de 400 metros e que sua trajetória é uma parábola, podemos afirmar que a pedra demora

a) 20 segundos para retornar à superfície e sua altura *h* em função do tempo *t* é dada pela expressão $h(t) = t^2 - 10t - 200$.
b) 15 segundos para retornar à superfície e sua altura *h* em função do tempo *t* é dada pela expressão $h(t) = -2t^2 + 20t + 150$.
c) aproximadamente 18,94 segundos para retornar à superfície e sua altura *h* em função do tempo *t* é dada pela expressão $h(t) = -t^2 + 20t - 20$.
d) aproximadamente 18,94 segundos para retornar à superfície e sua altura *h* em função do tempo *t* é dada pela expressão $h(t) = -5t^2 + 100t - 100$.
e) 17 segundos para retornar à superfície e sua altura *h* em função do tempo *t* é dada pela expressão $h(t) = t^2 - 20t + 51$.

253. (UF-PR) Durante o mês de dezembro, uma loja de cosméticos obteve um total de R$ 900,00 pelas vendas de um certo perfume. Com a chegada do mês de janeiro, a loja decidiu dar um desconto para estimular as vendas, baixando o preço desse perfume em R$ 10,00. Com isso, vendeu em janeiro 5 perfumes a mais do que em dezembro, obtendo um total de R$ 1 000,00 pelas vendas de janeiro. O preço pelo qual esse perfume foi vendido em dezembro era de:

a) R$ 55,00.
b) R$ 60,00.
c) R$ 65,00.
d) R$ 70,00.
e) R$ 75,00.

(UF-PE) As informações abaixo se referem às duas questões a seguir:

Quando o preço do sanduíche em uma lanchonete popular é de R$ 2,00 a unidade, são vendidas 180 unidades por dia. Uma pesquisa entre os clientes da lanchonete revelou que, a cada aumento de R$ 0,10 no preço do sanduíche, o número de unidades vendidas por dia diminui de 5. Por exemplo, se o preço do sanduíche for de R$ 2,20, o número de unidades vendidas por dia será 170.

254. Ajustando adequadamente o preço do sanduíche, qual o maior valor que a lanchonete poderá arrecadar por dia, com a venda dos sanduíches?

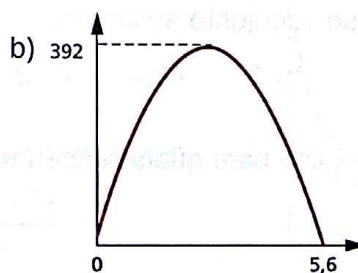
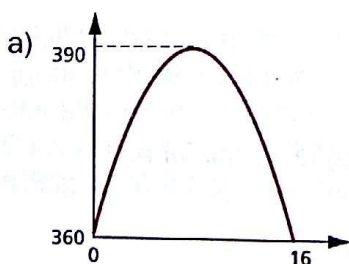
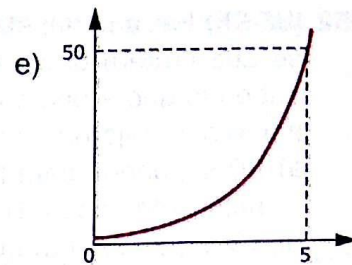
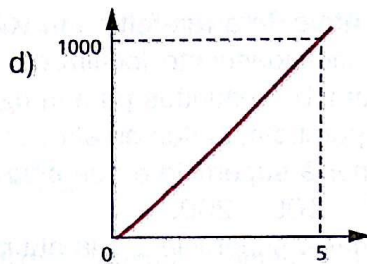
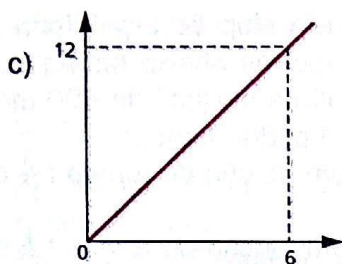
a) R$ 380,00
b) R$ 384,00
c) R$ 388,00
d) R$ 392,00
e) R$ 396,00

255. Qual dos gráficos a seguir representa o valor arrecadado pela lanchonete, diariamente, com a venda dos sanduíches, em função do preço *p* do sanduíche? O preço do sanduíche e o valor arrecadado estão em reais.

a)
b)

c)

d)

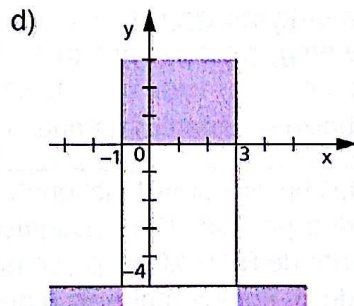
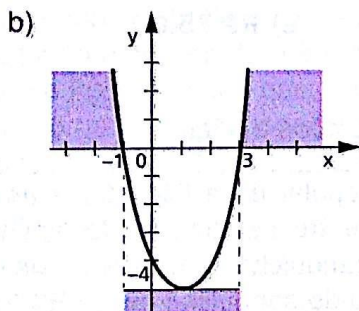
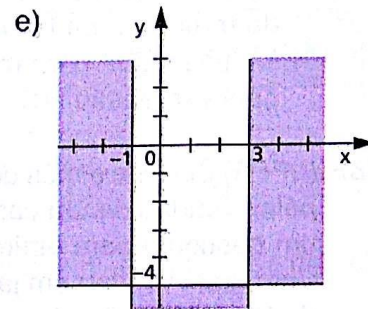
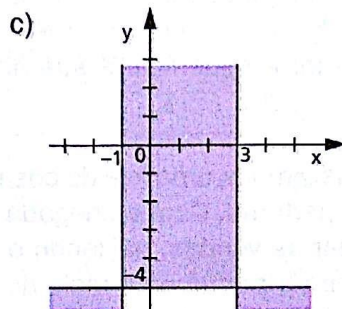
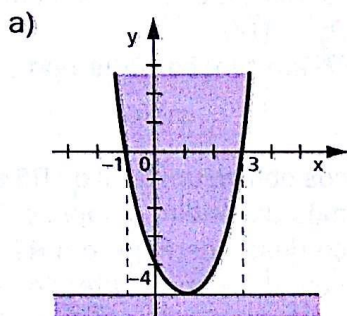
e)

256. (FGV-SP) A representação gráfica do conjunto solução de $(x^2 - 2x - 3)(-2y - 8) \geqslant 0$ no plano cartesiano ortogonal é melhor representada por

a) y, −1, 0, 3, x, −4

c)

e)

b)

d)

257. (UF-CE) A idade de Paulo, em anos, é um número inteiro par que satisfaz a desigualdade $x^2 - 32x + 252 < 0$. O número que representa a idade de Paulo pertence ao conjunto

a) {12, 13, 14}
b) {15, 16, 17}
c) {18, 19, 20}
d) {21, 22, 23}

258. (FEI-SP) Resolvendo a inequação $\frac{x^2 - 3x}{x - 1} < 0$, a quantidade de elementos inteiros não negativos de seu conjunto solução é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

259. (PUC-RJ) Determine para quais valores reais de *x* a inequação é satisfeita:

$$\frac{x^2 - 6x + 11}{x - 1} < 1$$

260. (Fatec-SP) Os números reais *x* e *y* são tais que:

$$y = \frac{2x^2 + 5x - 3}{1 - 5x}$$

Nessas condições, tem-se y < 0 se, e somente se, *x* satisfizer a condição

a) $-3 < x < -\frac{1}{2}$ ou $x > -\frac{1}{5}$

b) $-3 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > \frac{1}{5}$

c) $-3 < x < \frac{1}{5}$ ou $x > \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$ ou $x > 3$

e) $x < -3$ ou $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$

261. (PUC-RJ) Determine para quais valores reais de *x* vale cada uma das desigualdades abaixo:

a) $\frac{1}{x^2 - 8x + 15} < 0$

b) $\frac{1}{x^2 - 8x + 15} < \frac{1}{3}$

262. (UF-PI) Sejam x_1 e x_2 raízes reais e não negativas da equação $ax^2 + bx + c = 0$, na qual *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$. O valor da expressão $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, em função de *a*, *b* e *c*, é:

a) $\sqrt{|ac|} + \sqrt{|bc|}$

b) $\sqrt{-\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{c}{a}}}$

c) $\sqrt{-\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{c}{a}}}$

d) a + b + c

e) $\sqrt{\frac{-b + c}{a}}$

263. (ITA-SP) Dado o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\right\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

264. (UF-MA) Sejam X e Y os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$X = \left\{(x, y) \mid y = x - x^2 \geq 0\right\}$ e

$Y = \left\{(x, y) \mid y = x^2 - x \leq 0\right\}$

Se S representa a área da região R = X ∪ Y, marque a alternativa que representa uma estimativa adequada para S.

a) $\frac{1}{8}$ u.a. $\leq S \leq \frac{1}{4}$ u.a.

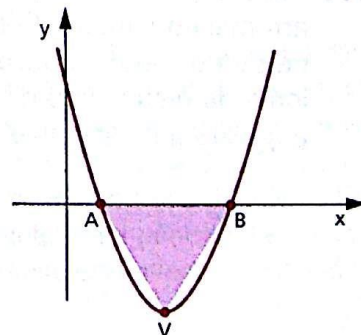
b) 1 u.a. $\leq S \leq$ 2 u.a.

c) $\frac{1}{2}$ u.a. $\leq S \leq$ 1 u.a.

d) $\frac{1}{4}$ u.a. $\leq S \leq \frac{1}{2}$ u.a.

e) 2 u.a. $\leq S \leq$ 4 u.a.

265. (UE-RJ) Observe a parábola de vértice V, gráfico da função quadrática definida por $y = ax^2 + bx + c$, que corta o eixo das abscissas nos pontos A e B.

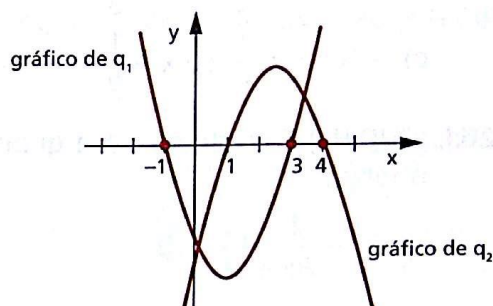
Calcule o valor numérico de $\Delta = b^2 - 4ac$, sabendo que o triângulo ABV é equilátero.

266. (ITA-SP) Considere a equação:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

a) Para que valores do parâmetro real *p* a equação admite raízes reais?
b) Determine todas essas raízes reais.

267. (PUC-RJ) Encontre que valores reais de *x* satisfazem a cada desigualdade abaixo:

a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} > \frac{1}{2}$ b) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} > 1$ c) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} > 2$

268. (Unifesp-SP) Considere as funções quadráticas $q_1(x)$ e $q_2(x)$ cujos gráficos são exibidos na figura.
a) Faça o esboço de um possível gráfico da função produto $q(x) = q_1(x)q_2(x)$.
b) Calcule o quociente do polinômio $h(x) = xq(x)$ pelo polinômio $k(x) = x + 1$ e exiba suas raízes.

269. (Unicamp-SP) Uma grande preocupação atual é a poluição, particularmente aquela emitida pelo crescente número de veículos automotores circulando no planeta. Ao funcionar, o motor de um carro queima combustível, gerando CO_2, além de outros gases e resíduos poluentes.
a) Considere um carro que, trafegando a uma determinada velocidade constante, emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de combustível que consome. Nesse caso, quantos quilogramas de CO_2 ele emitiu em uma viagem de 378 km, sabendo que fez 13,5 km por litro de gasolina nesse percurso?
b) A quantidade de CO_2 produzida por quilômetro percorrido depende da velocidade do carro. Suponha que, para o carro em questão, a função c(v) que fornece a quantidade de CO_2, em g/km, com relação à velocidade *v*, para velocidades entre 20 e 40 km/h, seja dada por um polinômio do segundo grau. Determine esse polinômio com base nos dados da tabela abaixo.

Velocidade (km/h)	Emissão de CO_2 (g/km)
20	400
30	250
40	200

270. (Unicamp-SP) Durante um torneio paraolímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (*y*) do peso em função de sua distância horizontal (*x*), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela abaixo. Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória (parabólica) do peso.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

a) Determine os valores de *a*, *b* e *c*.
b) Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso.

271. (UF-BA) Uma empresa observou que a quantidade Q, em toneladas, de carne que ela exporta em uma semana é dada por $Q(x) = ax^2 + bx + c$, sendo *a*, *b* e *c* constantes, e *x* o preço do produto, em reais, por quilograma, praticado na referida semana, sendo $3 \leq x \leq 8$. Sabe-se que, para o preço de R$ 3,00, a quantidade é de 7,5 toneladas, que para R$ 4,00, a quantidade é máxima e que, para R$ 8,00, a quantidade é zero.
Com base nessas informações, pode-se afirmar:
(01) A quantidade Q(x) diminui à medida que o preço *x* aumenta.
(02) Para o preço de R$ 5,00, a quantidade é de 7,5 toneladas.
(04) A constante $\frac{b}{a}$ é igual a −8.
(08) Existe um único preço *x*, $3 \leq x \leq 8$, tal que $Q(x) = 3,5$.
(16) Para cada preço *x*, $3 \leq x \leq 8$, tem-se $Q(x) = -x^2 + 8x$.

272. (UF-ES) Num país longínquo, a tributação sobre a venda de veículos novos é feita por meio de um imposto único de 8%, que incide sobre o valor de venda estipulado pelas concessionárias. O preço final de um veículo ao consumidor é o valor estipulado pelas concessionárias acrescido dos 8% de imposto, que as concessionárias então repassam ao governo. Como as vendas vinham caindo muito, em decorrência da crise mundial, o governo resolveu reduzir temporariamente esse imposto para 4%.
a) Determine a queda percentual no preço final de um veículo novo ao consumidor. Essa queda depende do preço de venda estipulado pelas concessionárias? Justifique sua resposta.
b) A redução do imposto veio acompanhada de um acréscimo de 20% nas vendas, o que não impediu que o governo perdesse receita. Determine a queda percentual da receita do governo advinda do imposto sobre a venda de veículos novos.
c) Ao invés de reduzir o imposto para 4%, o governo poderia ter reduzido o imposto para x%. Admitindo que, com a redução do imposto para x%, houvesse um aumento de 5(8 − x)% nas vendas, o governo arrecadaria uma fração f(x), $0 \leq x \leq 8$, e esboce o gráfico de *f*.

273. (FGV-SP) Segundo um analista de mercado, nos últimos 7 anos, o preço médio dos imóveis por metro quadrado (em R$ 100) pode ser representado pela equação abaixo (em que *t* representa o tempo, em anos, variando de $t = -3$ em 2004 a $t = 3$ em 2010):

$$\text{Preço}(t) = -3t^2 + 6t + 50$$

a) De acordo com o analista, houve uma crise no mercado imobiliário nesse período, em um ano em que o preço dos imóveis por metro quadrado atingiu o valor máximo, decaindo no ano seguinte. Em que ano ocorreu a referida crise?
b) Um investidor comprou um imóvel de 100 m^2 no início de 2006, ao preço médio de mercado, e o vendeu, também ao preço médio de mercado, no início de 2009. Qual teria sido a diferença no lucro auferido (em R$) se tivesse investido, durante o mesmo período de 3 anos, os recursos em um CDB que paga juros compostos de 10% ao ano?
c) Um investidor comprou um imóvel no início de 2006 e o vendeu no início de 2009. A que taxa anual de juros simples ele deveria ter investido, durante esse período de 3 anos, o valor pelo qual comprou o imóvel em 2006, para obter um lucro equivalente ao obtido com a venda do imóvel em 2009?

274. (Unicamp-SP) Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R$ 2400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R$ 64,00 a menos que cada homem. Denotando por *x* o número de homens do grupo, uma expressão que modela esse problema e permite encontrar tal valor é:

a) $2400x = (2400 + 64x)(40 - x)$.
b) $2400(40 - x) = (2400 - 64x)x$.
c) $2400x = (2400 - 64x)(40 - x)$.
d) $2400(40 - x) = (2400 + 64x)x$.

275. (UF-PR) Para atrair novos clientes, um supermercado decidiu fazer uma promoção reduzindo o preço do leite. O gerente desse estabelecimento estima que, para cada R$ 0,01 de desconto no preço do litro, será possível vender 25 litros de leite a mais que em um dia sem promoção. Sabendo que, em um dia sem promoção, esse supermercado vende 2600 litros de leite ao preço de R$ 1,60 por litro:

a) Qual é o valor arrecadado por esse supermercado com a venda de leite em um dia sem promoção?
b) Qual será o valor arrecadado por esse supermercado com a venda de leite em um dia, se cada litro for vendido por R$ 1,40?
c) Qual é o preço do litro de leite que fornece a esse supermercado o maior valor arrecadado possível? De quanto é esse valor arrecadado?

276. (Enem-MEC) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade *q* de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade *q* também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total (LT) obtido pela venda da quantidade *q* de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$.
Considerando-se as funções $FT(q) = 5q$ e $CT(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

277. (UF-PE) Uma editora imprime 1000 cópias de certo livro ao preço de R$ 10,00 por livro. Se o número de cópias exceder 1000, a cada aumento de 100 cópias, o preço por livro diminui de R$ 0,20; por exemplo, para a impressão de 1 200 cópias, o preço por livro é de R$ 9,60. Se, para a editora, o preço de custo de cada livro é de R$ 6,00, qual o maior lucro que a editora pode obter com a impressão deste livro?

a) R$ 4500,00
b) R$ 4600,00
c) R$ 4700,00
d) R$ 4800,00
e) R$ 4900,00

278. (Unesp-SP) Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, se um astronauta viajar em uma nave espacial muito rapidamente em relação a um referencial na Terra, o tempo passará mais devagar para o astronauta do que para as pessoas que ficaram na Terra. Suponha que um pai astronauta, com 30 anos de idade, viaje numa nave espacial, numa velocidade constante, até o planeta recém-descoberto GL581c, e deixe na Terra seu filho com 10 anos de idade. O tempo *t* decorrido na Terra (para o filho) e o tempo T decorrido para o astronauta, em função da velocidade *v* dessa viagem (ida e volta, relativamente ao referencial da Terra e desprezando-se aceleração e desaceleração), são dados respectivamente pelas equações

$$t = \frac{40c}{v}, \qquad T = \frac{40c}{v}\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

onde c é uma constante que indica a velocidade da luz no vácuo e *t* e T são medidos em anos. Determine, em função de *c*, a que velocidade o pai deveria viajar de modo que, quando retornasse à Terra, ele e seu filho estivessem com a mesma idade.

Função modular

279. (UF-MG) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é racional} \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Então, é correto afirmar que o maior elemento do conjunto

$$\left\{f\left(\frac{7}{31}\right), f(1), f(3{,}14), f\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right)\right\} \text{ é}$$

a) $f\left(\frac{7}{31}\right)$ b) f(1) c) f(3,14) d) $f\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right)$

280. (PUC-RS) Num circuito elétrico em série contendo um resistor R e um indutor L, a força eletromotriz E(t) é definida por

$$E(t) = \begin{cases} 110, & 0 \leq t \leq 30 \\ 0, & t > 30 \end{cases}$$

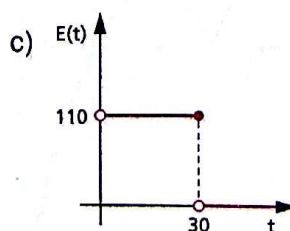
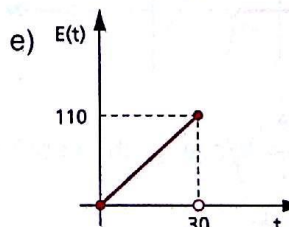
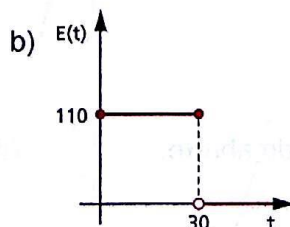
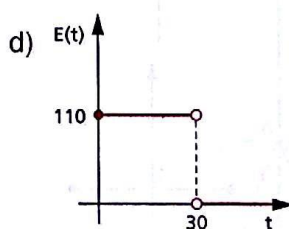
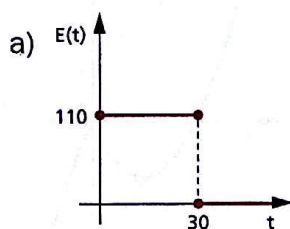
O gráfico que representa corretamente essa função é

a)

d)

b)

e)

c)

281. (UF-PA) Um professor de Matemática Aplicada enviou a seguinte mensagem ao seu melhor aluno, um estudante chamado Nicéphoro, que gostava muito de desenhar e traçar gráficos:

> Prezado Nicéphoro,
>
> Estive analisando cuidadosamente aquele problema de matemática e percebi que ele é regido por uma função pulso-unitário definida por
>
> $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$
>
> Trace, por favor, usando os seus conhecimentos, o gráfico desta função e o envie para mim.
>
> Um abraço e saudações matemáticas
>
> Euclides Arquimedes.

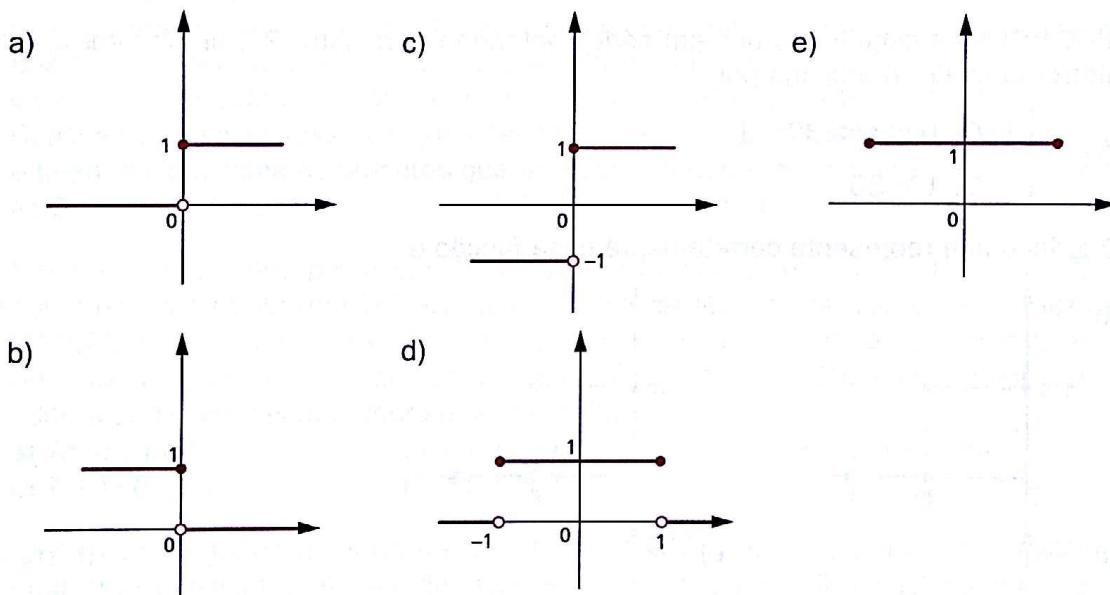
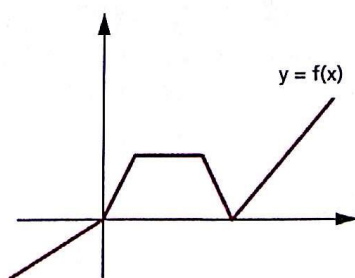
Nicéphoro traçou corretamente o gráfico da função acima e o enviou ao prof. Euclides Arquimedes. O gráfico enviado foi

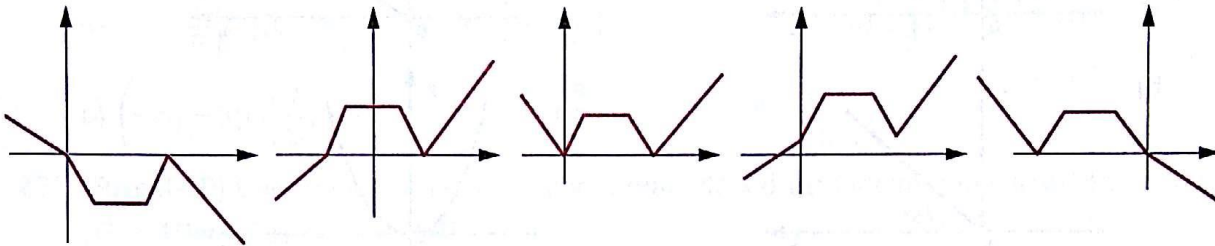
a)

c)

e)

b)

d)

282. (UF-PR) Considere a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está esboçado abaixo.

Numere os gráficos a seguir estabelecendo sua correspondência com cada uma das funções apresentadas a seguir:

1. $y = |f(x)|$
2. $y = -f(x)$
3. $y = f(-x)$
4. $y = f(x + 2)$
5. $y = f(x) + 2$

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta, da esquerda para a direita.

a) 2 – 4 – 5 – 1 – 3.
b) 5 – 4 – 1 – 2 – 3.
c) 2 – 4 – 1 – 5 – 3.
d) 1 – 3 – 2 – 5 – 4.
e) 2 – 5 – 1 – 3 – 4.

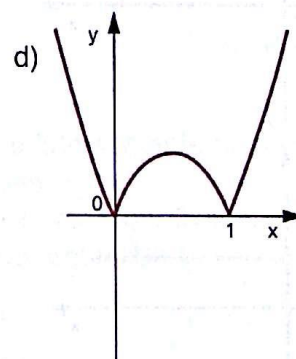
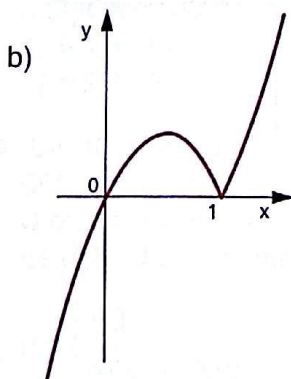
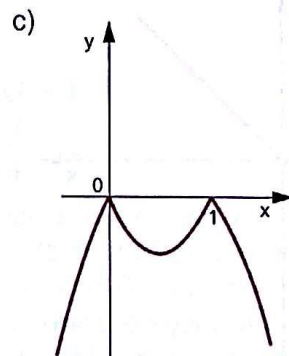
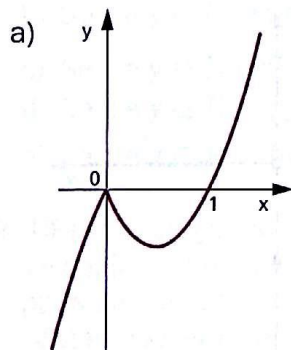
283. (UF-MG) Considere a função $f(x) = x\,|1 - x|$.

Assinale a alternativa em que o gráfico dessa função está correto.

a)

c)

b)

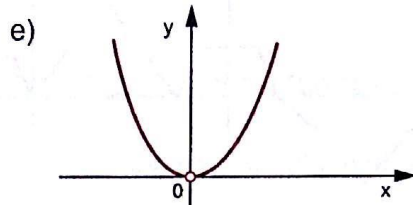
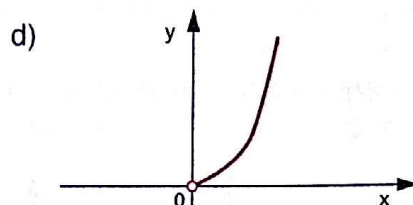
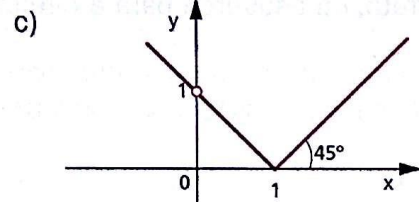
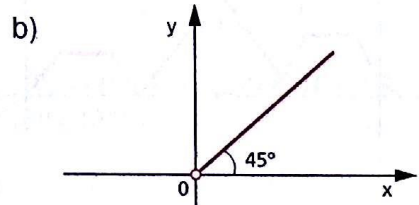
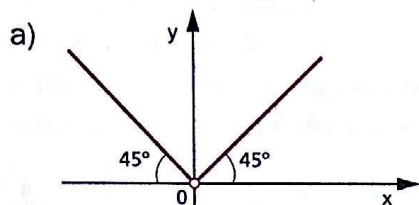
d)

284. (FGV-SP) Seja f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1 - \dfrac{x-1}{x}}}$. A representação gráfica de *f* no plano cartesiano ortogonal é

a)

d)

b)

e)

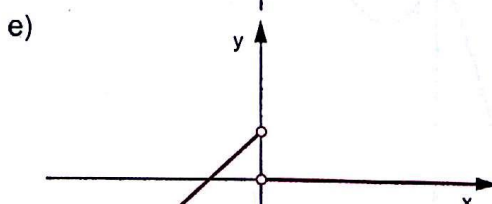
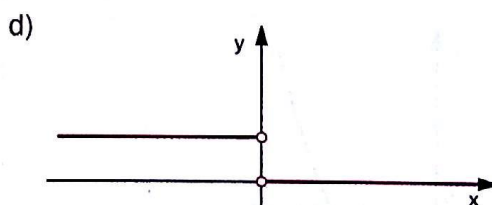
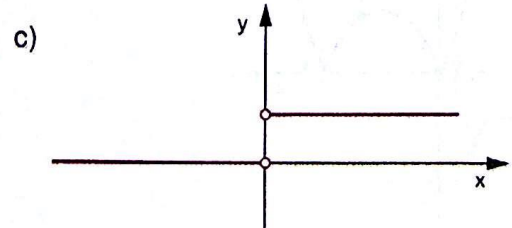
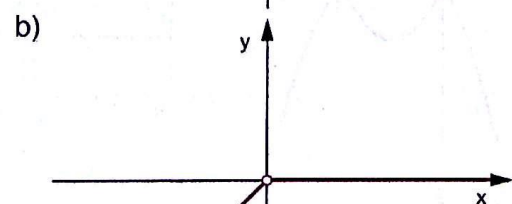
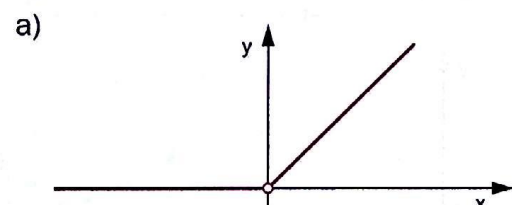
c)

285. (UF-RS) Considerando a função definida por $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + 1$, assinale, entre os gráficos apresentados nas alternativas, aquele que pode representar *f*.

a)

d)

b)

e)

c)

286. (UF-RJ) Considere a função $f: R \to R$ definida por $f(2x) = |1 - x|$.
Determine os valores de x para os quais $f(x) = 2$.

287. (FEI-SP) Considere os valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 2| \leq 5$ e $|x - 1| > 3$. A soma desses valores é igual a:
a) 15 b) 17 c) 18 d) 19 e) 22

288. (UF-AM) O conjunto solução de $|3x - 5| \geq 2x - 2$ é o conjunto:

a) $\left(-\infty, \frac{7}{5}\right] \cup [3, +\infty)$
b) $(-\infty, -3] \cup \left[\frac{7}{5}, +\infty\right)$
c) $\left(-\infty, \frac{7}{5}\right)$
d) $(3, +\infty)$
e) $\left(\frac{7}{5}, 3\right)$

289. (Fuvest-SP) Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade
$|x^2 - 10x + 21| \leq |3x - 15|$.

290. (Fuvest-SP)
a) Represente no sistema de coordenadas [...] os gráficos das funções $f(x) = |4 - x^2|$ e $g(x) = \frac{x+7}{2}$.
b) Resolva a inequação $|4 - x^2| \leq \frac{x+7}{2}$.

291. (UFF-RJ) Assinale, dentre as alternativas a seguir, aquela que é uma sentença matemática verdadeira:
a) Se x e $y \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $x^2 - y^2 \neq 0$
b) Se x e $y \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{|x||y|} > \frac{|x|+|y|}{2}$
c) Se x e $y \in \mathbb{R}$ e $x^2 > y^2$, então $x > y$
d) Se x e $y \in \mathbb{R}$ e $x + 2y \neq 0$, então $x^2 + y^2 \neq 0$
e) Se x e $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $x > y$, então $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

292. (UF-PE) O preço da cópia xérox em uma papelaria é de R$ 0,12 a unidade, se o número de cópias é no máximo 100; se o número de cópias excede 100 e é no máximo 200, paga-se R$ 0,12 a unidade pelas primeiras 100 cópias e R$ 0,10 a unidade nas cópias que excedem 100; se o número de cópias é superior a 200, paga-se o valor anterior pelas primeiras 200 cópias e, para as cópias que excedem 200, paga-se R$ 0,08 a unidade. Qual o valor pago por 320 cópias?
a) R$ 31,00
b) R$ 31,20
c) R$ 31,60
d) R$ 32,00
e) R$ 36,40

293. (UF-MG) Uma fábrica vende determinado produto somente por encomenda de, no mínimo, 500 unidades e, no máximo, 3 000 unidades.
O preço P, em reais, de cada unidade desse produto é fixado, de acordo com o número x de unidades encomendadas, por meio desta equação:

$$P = \begin{cases} 90, & \text{se } 500 \leq x \leq 1000 \\ 100 - 0{,}01x, & \text{se } 1000 < x \leq 3000 \end{cases}$$

O custo C, em reais, relativo à produção de x unidades desse produto é calculado pela equação:

$$C = 60x + 10\,000$$

O lucro L apurado com a venda de x unidades desse produto corresponde à diferença entre a receita apurada com a venda dessa quantidade e o custo relativo à sua produção.
Considerando essas informações:

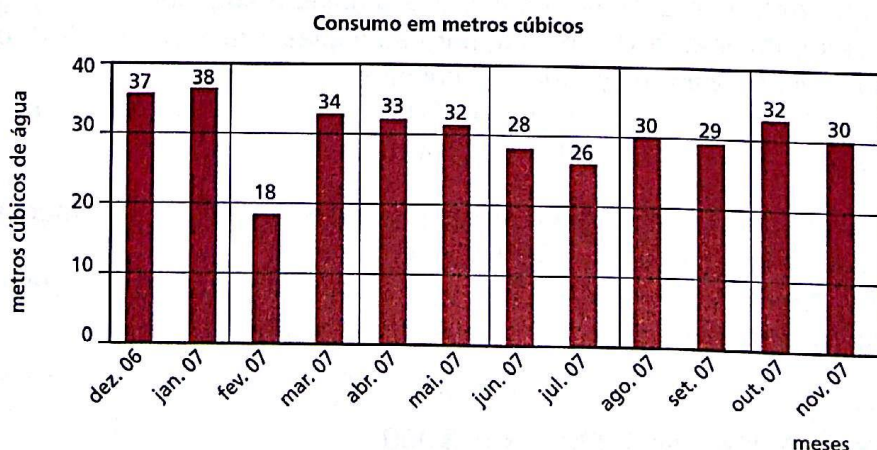
1. Escreva a expressão do lucro L correspondente à venda de x unidades desse produto para $500 \leqslant x \leqslant 1\,000$ e para $1\,000 < x \leqslant 3\,000$.
2. Calcule o preço da unidade desse produto correspondente à encomenda que maximiza o lucro.
3. Calcule o número mínimo de unidades que uma encomenda deve ter para gerar um lucro de, pelo menos, R$ 26 400,00.

294. (Enem-MEC) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.
Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t)=\begin{cases}\dfrac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leqslant t < 100\\[2mm] \dfrac{2}{125}t^2 - \dfrac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geqslant 100\end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.
Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C.
O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a

a) 100 b) 108 c) 128 d) 130 e) 150

295. (Unesp-SP) O gráfico representa o consumo mensal de água em uma determinada residência no período de um ano. As tarifas de água para essa residência são dadas a seguir.

Faixa f (m³)	Tarifa (R$)
$0 \leq f \leq 10$	0,50
$10 < f \leq 20$	1,00
$20 < f \leq 30$	1,50
$30 < f \leq 40$	2,00

Assim, por exemplo, o gasto no mês de março, que corresponde ao consumo de 34 m³, em reais, é: $10 \cdot 0{,}50 + 10 \cdot 1{,}00 + 10 \cdot 1{,}50 + 4 \cdot 2{,}00 = 38{,}00$.
Vamos supor que essas tarifas tenham se mantido no ano todo.
Note que nos meses de janeiro e fevereiro, juntos, foram consumidos 56 m³ de água e para pagar essas duas contas foram gastos X reais. O mesmo consumo ocorreu nos meses de julho e agosto, juntos, mas para pagar essas duas contas foram gastos Y reais. Determine a diferença X − Y.

Considere o texto abaixo para responder às questões **296** e **297**.

A empresa A vende seu produto, a preços progressivos, de acordo com a seguinte tabela:

Número	Valor unitário
de 1 a 1000	R$ 2,00
de 1001 a 5000	R$ 1,80
acima de 5000	R$ 1,60

A empresa B vende o mesmo produto da empresa A pelo valor fixo de R$ 1,80.

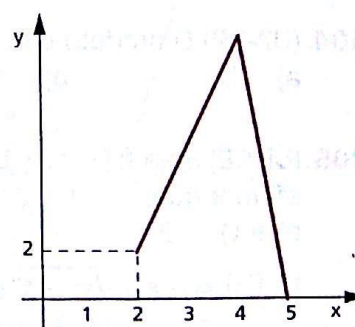
296. (UE-CE) Uma loja comprou 8000 unidades da empresa A, então o valor médio unitário foi de

a) R$ 1,64 b) R$ 1,65 c) R$ 1,70 d) R$ 1,75 e) R$ 1,76

297. (UE-CE) É economicamente conveniente adquirir produtos da empresa A somente a partir de uma quantidade maior que

a) 6000 unidades.
b) 6500 unidades.
c) 7000 unidades.
d) 7500 unidades.
e) 8000 unidades.

298. (Fuvest-SP) Considere a função f, cujo domínio é o intervalo fechado $[0, 5]$ e que está definida pelas condições:

- para $0 \leq x \leq 1$, tem-se $f(x) = 3x + 1$;
- para $1 < x < 2$, tem-se $f(x) = -2x + 6$;
- f é linear no intervalo $[2, 4]$ e também no intervalo $[4, 5]$, conforme mostra a figura ao lado;
- a área sob o gráfico de f no intervalo $[2, 5]$ é o triplo da área sob o gráfico de f no intervalo $[0, 2]$.

Com base nessas informações:

a) desenhe, no sistema de coordenadas [...], o gráfico de f no intervalo $[0, 2]$;
b) determine a área sob o gráfico de f no intervalo $[0, 2]$;
c) determine $f(4)$.

299. (Unicamp-SP) O transporte fluvial de cargas é pouco explorado no Brasil, considerando-se nosso vasto conjunto de rios navegáveis. Uma embarcação navega a uma velocidade de 26 nós, medida em relação à água do rio (use 1 nó = 0,5 m/s). A correnteza do rio, por sua vez, tem velocidade aproximadamente constante de 5,0 m/s em relação às margens. Qual é o tempo aproximado de viagem entre duas cidades separadas por uma extensão de 40 km de rio, se o barco navega rio acima, ou seja, contra a correnteza?

a) 2 horas e 13 minutos.
b) 1 hora e 23 minutos.
c) 51 minutos.
d) 37 minutos.

300. (UF-CE) Dadas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$, o número de pontos na interseção do gráfico de *f* com o gráfico de *g* é igual a:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

301. (ITA-SP) Sobre a equação na variável real x, $|||x - 1| - 3| - 2| = 0$, podemos afirmar que:

a) Ela não admite solução real.
b) A soma de todas as soluções é 6.
c) Ela admite apenas soluções positivas.
d) A soma de todas as soluções é 4.
e) Ela admite apenas duas soluções reais.

302. (UF-PI) Sobre o domínio da função $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = \sqrt{3 - |x + 2|}$, pode-se afirmar que:

a) Contém somente seis números inteiros.
b) Possui dois inteiros positivos.
c) É um intervalo de comprimento igual a seis unidades.
d) Não possui números racionais.
e) É um conjunto finito.

303. (Mackenzie-SP) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{2 - ||x + 3| - 5|}$, $x \in \mathbb{R}$, é

a) $[-10, 4]$
b) $[-6, 4]$
c) $[-10, -6] \cup [0, \infty)$
d) $(-\infty, -10] \cup [0, 4]$
e) $[-10, -6] \cup [0, 4]$

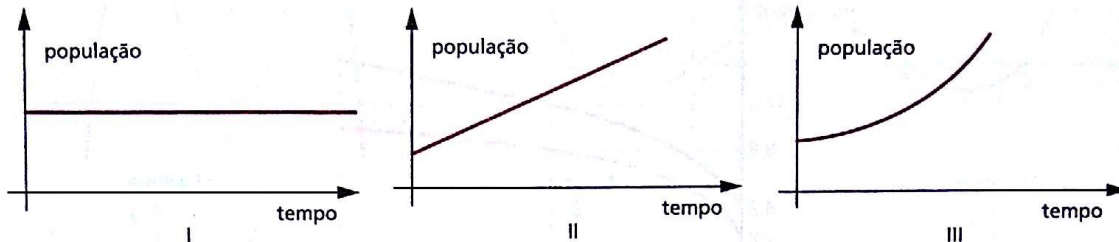
304. (ITA-SP) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

a) -5. b) -1. c) 1. d) 2. e) 5.

305. (UF-CE) Seja $f: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = |x + \sqrt{x^2 - 1}|$. É correto afirmar que:

a) $f(1) = 2$
b) $f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ se $x \geqslant 1$.
c) $f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 1}$ se $x \leqslant -1$.
d) $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 1}$ se $x \leqslant -1$.
e) $f(x) = 0$ para todo real *x* no domínio *f*.

Outras funções elementares

306. (UFF-RJ) Os gráficos I, II e III, abaixo, esboçados em uma mesma escala, ilustram modelos teóricos que descrevem a população de três espécies de pássaros ao longo do tempo.

Sabe-se que a população da espécie A aumenta 20% ao ano, que a população da espécie B aumenta 100 pássaros ao ano e que a população da espécie C permanece estável ao longo dos anos.

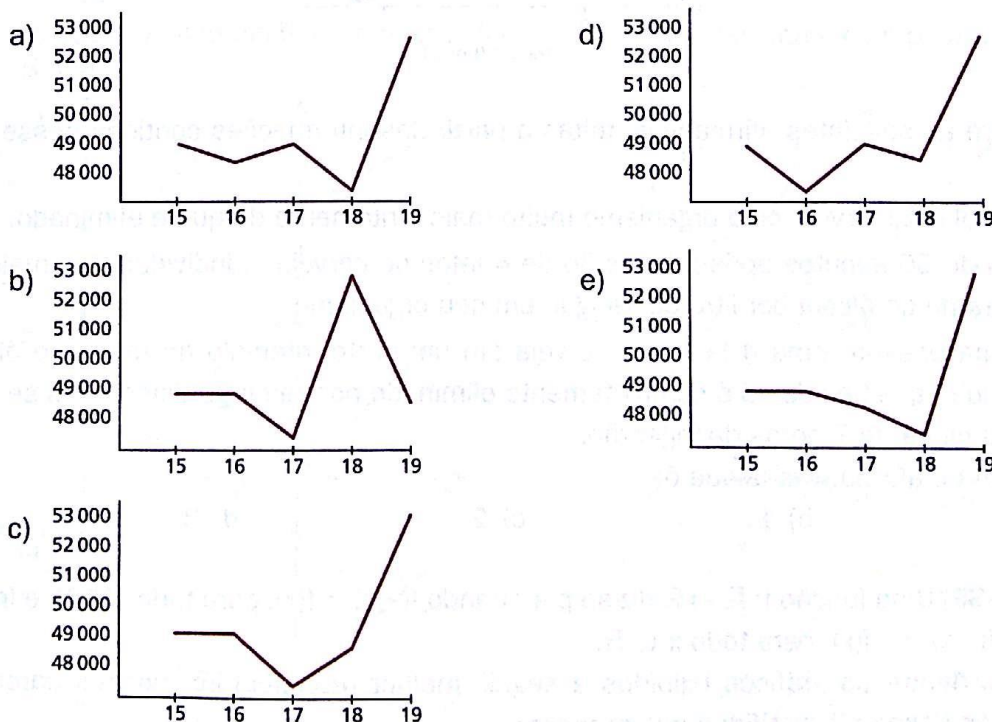
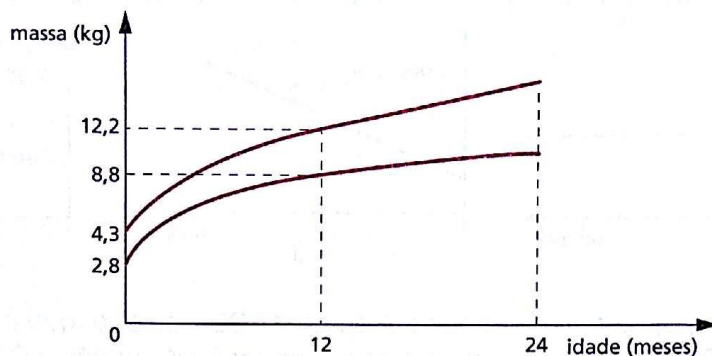
Assim, a evolução das populações das espécies A, B e C, ao longo do tempo, corresponde, respectivamente, aos gráficos:

a) I, III e II b) II, I e III c) II, III e I d) III, I e II e) III, II e I

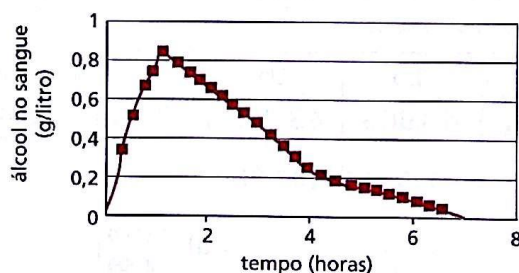
307. (UE-CE) Na semana de 15 a 21 de setembro de 2008 o governo dos Estados Unidos da América divulgou um plano de socorro às instituições financeiras em crise. O Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa) teve forte variação e obteve, no fechamento de cada dia da semana, os seguintes valores:

Dia	15	16	17	18	19
Índice	48 909	48 989	47 348	48 484	52 718

O gráfico que representa essa variação é:

a)
d)
b)
e)
c)

308. (Unesp-SP) A figura representa a evolução da massa corpórea esperada de bebês ao longo do tempo. A massa corpórea do bebê deve estar na região entre as curvas para que se considere que ele esteja se desenvolvendo bem.

Qual a menor massa corpórea esperada para um bebê que esteja se desenvolvendo bem, com idade de 12 meses?

a) 15 kg b) 12,2 kg c) 8,8 kg d) 4,3 kg e) 2,8 kg

309. (PUC-MG) O gráfico abaixo mostra o processo de absorção e eliminação do álcool imediatamente após o indivíduo ingerir 4 latas de cerveja.

Considere as seguintes afirmativas, feitas a partir das informações contidas nesse gráfico:

I. O álcool é absorvido pelo organismo muito mais lentamente do que é eliminado.

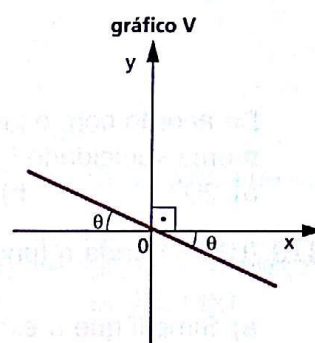
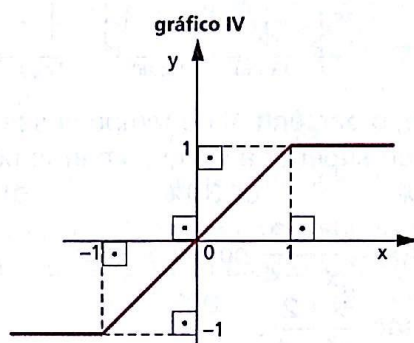
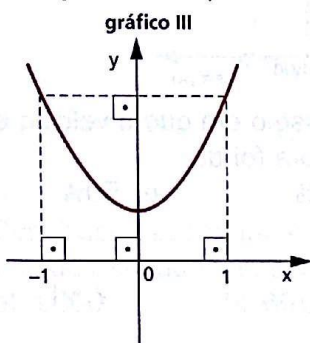
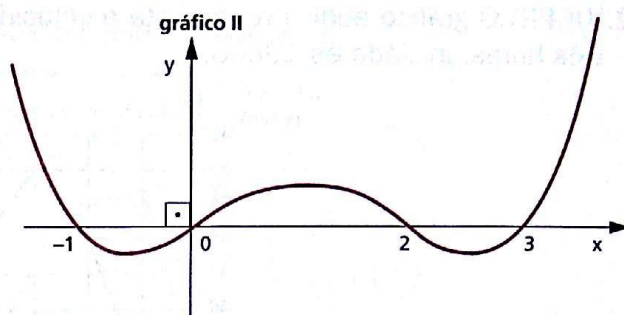
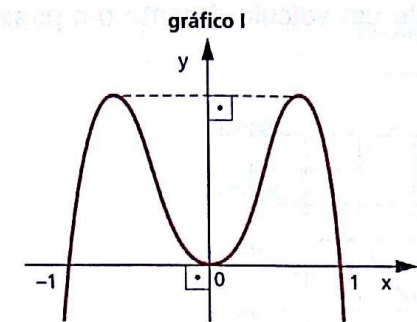
II. Cerca de 60 minutos após a ingestão de 4 latas de cerveja, o indivíduo tem mais de 0,8 grama de álcool por litro de sangue em seu organismo.

III. Se uma pessoa toma 4 latas de cerveja em um curto intervalo de tempo, o álcool contido nessa bebida só é completamente eliminado por seu organismo após se passarem cerca de 7 horas da ingestão.

O número de afirmativas falsas é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

310. (Unifesp-SP) Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos a seguir, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.

b) Dê dois exemplos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

311. (Unesp-SP) Quando uma partícula de massa *m*, carregada com carga *q*, adentra com velocidade *v* numa região onde existe um campo magnético constante de intensidade B, perpendicular a *v*, desprezados os efeitos da gravidade, sua trajetória passa a ser circular. O raio de sua curvatura é dado por $r = \frac{mv}{qB}$ e sua velocidade angular é dada por $\omega = \frac{qB}{m}$.

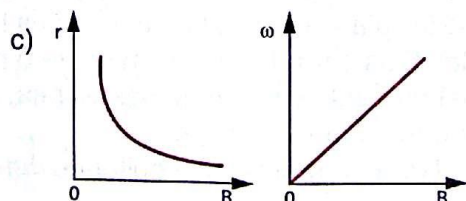
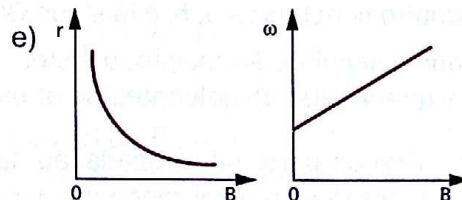
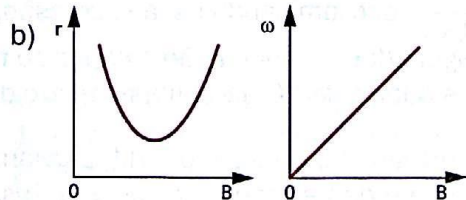
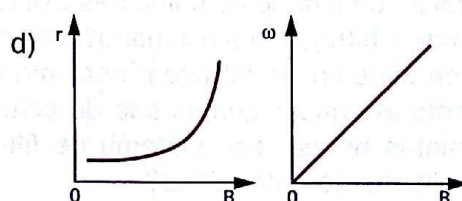
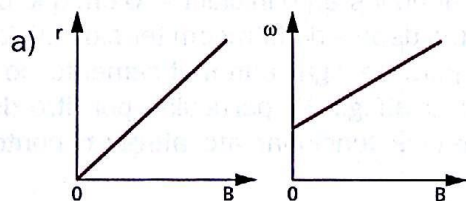
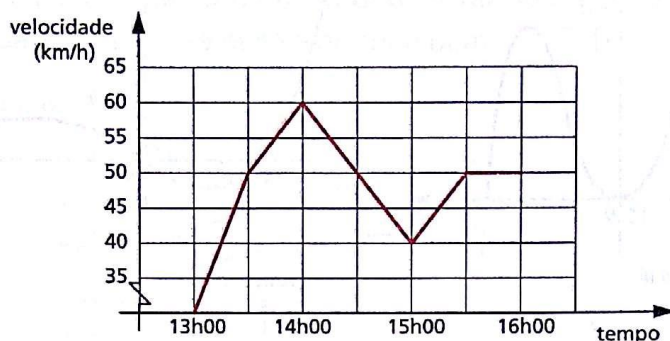
Os gráficos que melhor representam como *r* e ω se relacionam com possíveis valores de B são:

a)

d)

b)

e)

c)

312. (UF-PR) O gráfico abaixo representa a velocidade de um veículo durante um passeio de três horas, iniciado às 13h00.

De acordo com o gráfico, o percentual de tempo nesse passeio em que o veículo esteve a uma velocidade igual ou superior a 50 quilômetros por hora foi de:

a) 20% b) 25% c) 30% d) 45% e) 50%

313. (UF-RN) Dada a função $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ com $x \neq \pm 2$:

a) Simplifique a expressão $\dfrac{x+2}{x^2-4}$.
b) Calcule f(0), f(1), f(3) e f(4).
c) Use os eixos [...] para esboçar o gráfico de *f*.

314. (UF-PR) Uma fábrica de produtos químicos possui um sistema de filtragem do ar que é ligado automaticamente toda vez que a quantidade de poluentes no ar atinge certo nível previamente estabelecido. Sabe-se que a quantidade Q(t) de poluentes no ar dessa fábrica, depois de ligado o sistema de filtragem, é dada em função do tempo pela expressão:

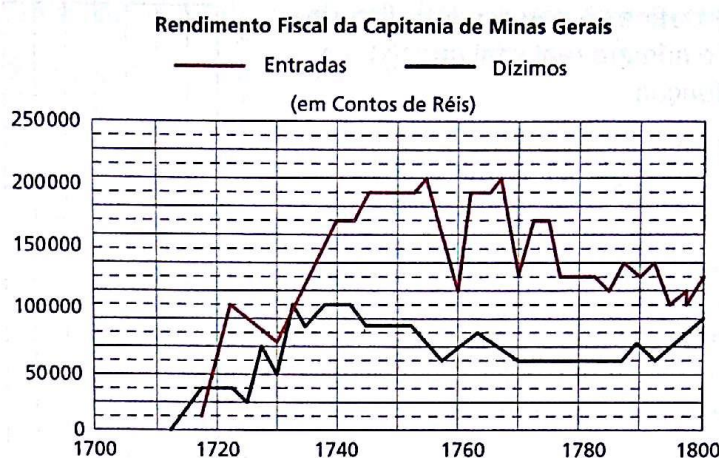
$$Q(t) = \frac{10t + 750}{t + 15}$$

sendo a quantidade Q(t) medida em partículas por litro de ar e o tempo *t* em minutos.

a) Qual a quantidade de poluentes existentes no ar no instante inicial $t = 0$ em que o sistema de filtragem foi acionado? E quinze minutos depois da filtragem ter sido iniciada?
b) Esse sistema de filtragem está programado para desligar automaticamente no momento em que a quantidade de poluentes no ar atingir 12 partículas por litro de ar. Quantas horas esse sistema de filtragem precisa funcionar até atingir o ponto de desligamento automático?
c) Encontre constantes *a*, *b*, *c* tais que $Q(t) = a + \dfrac{b}{t+c}$ e, examinando essa expressão, justifique a seguinte afirmação: o sistema de filtragem dessa fábrica não é capaz de reduzir a quantidade de poluentes no ar para valores abaixo de 10 partículas por litro de ar.

315. (UF-GO) Grande parte da arrecadação da Coroa Portuguesa, no século XVIII, provinha de Minas Gerais devido à cobrança do quinto, do dízimo e das entradas (*Revista de História da Biblioteca Nacional*). Desses impostos, o dízimo incidia sobre o valor de todos os bens de um indivíduo, com uma taxa de 10% desse valor. E as entradas incidiam sobre o peso das mercadorias (secos e molhados, entre outros) que entravam em Minas Gerais, com uma taxa de, aproximadamente, 1 125 contos de réis por arroba de peso.

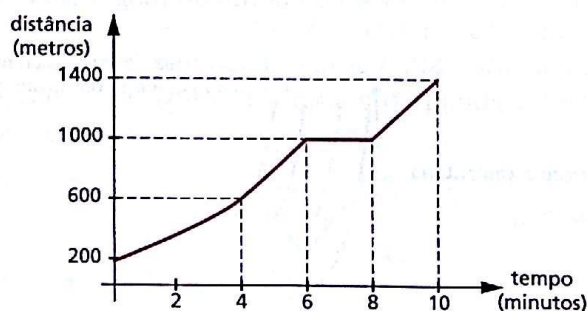
O gráfico a seguir mostra o rendimento das entradas e do dízimo, na capitania, durante o século XVIII.

Revista de História da Biblioteca Nacional, Rio de Janeiro, ano 2, n. 23, ago. 2007. [Adaptado].

Com base nessas informações, em 1760, na capitania de Minas Gerais, o total de arrobas de mercadorias, sobre as quais foram cobradas entradas, foi de aproximadamente:

a) 1000 b) 60000 c) 80000 d) 100000 e) 750000

316. (Fuvest-SP) Considere a função $f(x) = 1 - \frac{4x}{(x+1)^2}$, a qual está definida para $x \neq -1$. Então, para todo $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x) \cdot f(-x)$ é igual a:

a) -1 b) 1 c) $x + 1$ d) $x^2 + 1$ e) $(x - 1)^2$

317. (UF-PR) Num teste de esforço físico, o movimento de um indivíduo caminhando em uma esteira foi registrado por um computador. A partir dos dados coletados, foi gerado o gráfico da distância percorrida, em metros, em função do tempo, em minutos, mostrado abaixo:

De acordo com esse gráfico, considere as seguintes afirmativas:

1. A velocidade média nos primeiros 4 minutos foi de 6 km/h.
2. Durante o teste, a esteira permaneceu parada durante 2 minutos.
3. Durante o teste, a distância total percorrida foi de 1200 m.

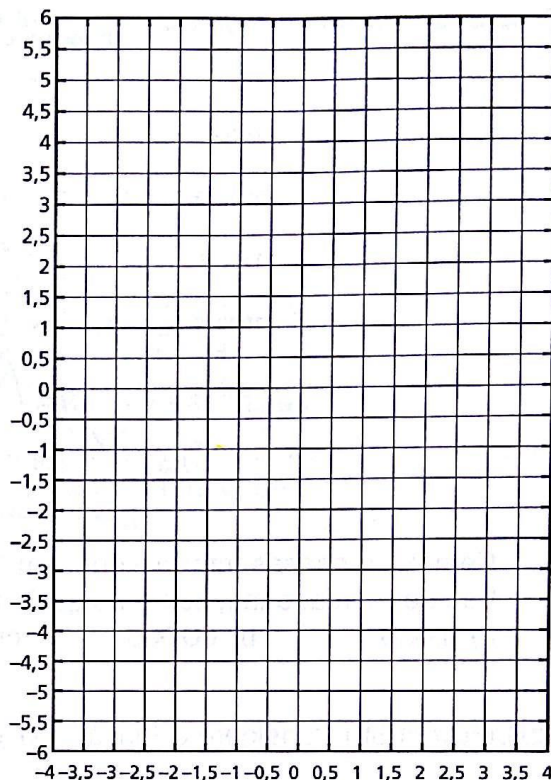
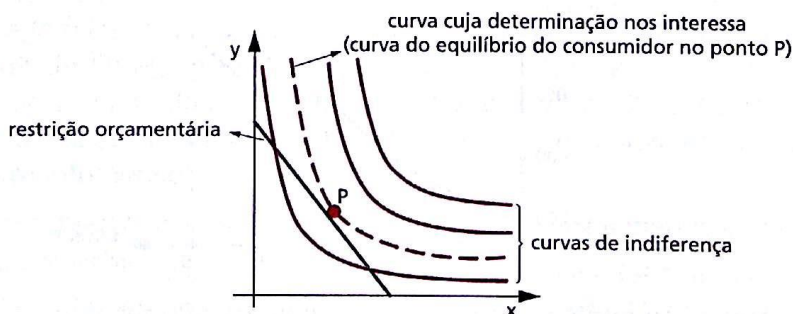
Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

318. (Unicamp-SP) Define-se como ponto fixo de uma função *f* o número real *x* tal que f(x) = x. Seja dada a função

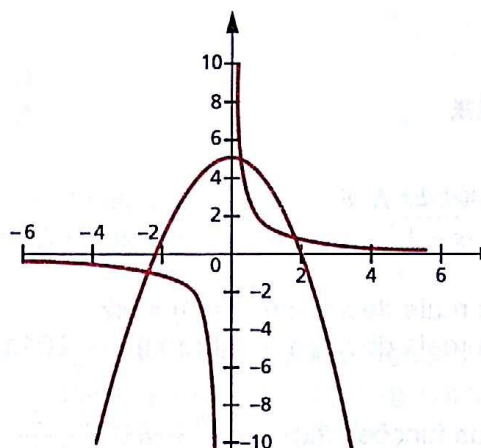
$$f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)} + 1.$$

a) Calcule os pontos fixos de f(x).

b) Na região quadriculada ao lado, represente o gráfico da função f(x) e o gráfico de g(x) = x, indicando explicitamente os pontos calculados no item *a*.

319. (FGV-SP) Em microeconomia, com alguma frequência, são estudados problemas envolvendo curvas de indiferença do consumidor com relação à aquisição de dois bens (*x* e *y*, por exemplo), em associação à curva de restrição orçamentária do consumidor para aquisição desses bens. Do ponto de vista matemático, o que interessa nesse tipo de problema é a identificação de uma função (a partir de uma família de funções das curvas de indiferença), cujo gráfico seja tangente ao gráfico da função de restrição orçamentária, bem como a determinação do ponto de tangência P, que representa o equilíbrio do consumidor.

Admita que a família de curvas de indiferença (com *x* e *y* positivos) seja dada por $y = \frac{k}{x}$, com $k \in]0, 100]$, e que a restrição orçamentária do consumidor em relação aos bens *x* e *y* seja dada por y = −3x + 9.

a) Faça um esboço, no plano cartesiano, dos gráficos da restrição orçamentária, e das curvas de indiferença para k = 4 e k = 12.

b) Determine o valor de *k* na situação de equilíbrio do consumidor e, em seguida, calcule as coordenadas do ponto P de equilíbrio do consumidor (observação: neste problema, tanto *k* quanto *x* e *y* do ponto P não são números inteiros).

320. (UF-PE) Na ilustração a seguir, temos parte dos gráficos das funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5 - x^2$ e g: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{2}{x}$.

Analise as afirmações a seguir referentes às duas funções.

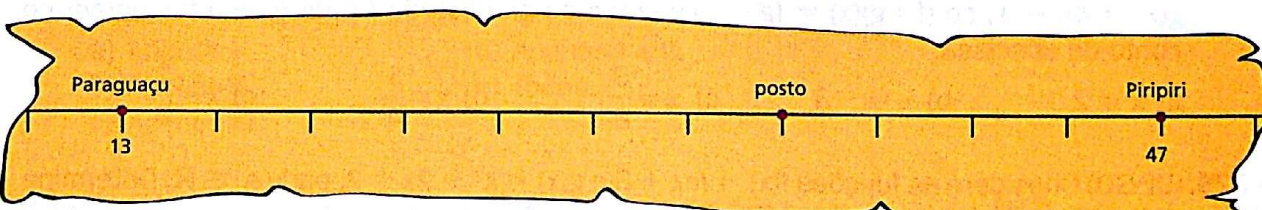
0-0) Um dos pontos de interseção dos gráficos de *f* e *g* é (2, 1).

1-1) As abscissas dos pontos de interseção dos gráficos de *f* e *g* são raízes reais da equação $x^3 - 5x + 2 = 0$.

2-2) $f(x) - g(x) = \dfrac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x}$, para todo *x* real e diferente de zero.

3-3) O ponto de interseção dos gráficos de *f* e *g* situado no terceiro quadrante tem ordenada $2\left(1-\sqrt{2}\right)$.

4-4) Os gráficos de *f* e *g* se interceptam em quatro pontos.

321. (Unicamp-SP) A figura abaixo mostra um fragmento de mapa, em que se vê o trecho reto da estrada que liga as cidades de Paraguaçu e Piripiri. Os números apresentados no mapa representam as distâncias, em quilômetros, entre cada cidade e o ponto de início da estrada (que não aparece na figura). Os traços perpendiculares à estrada estão uniformemente espaçados de 1 cm.

a) Para representar a escala de um mapa, usamos a notação 1: X, onde X é a distância real correspondente à distância de 1 unidade do mapa. Usando essa notação, indique a escala do mapa dado acima.

b) Repare que há um posto exatamente sobre um traço perpendicular à estrada. Em que quilômetro (medido a partir do ponto de início da estrada) encontra-se tal posto?

c) Imagine que você tenha que reproduzir o mapa dado usando a escala 1: 500 000. Se você fizer a figura em uma folha de papel, qual será a distância, em centímetros, entre as cidades de Paraguaçu e Piripiri?

322. (UF-CE) O coeficiente *b* da função quadrática f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + 1$, que satisfaz a condição $f(f(-1)) = 3$, é igual a:
a) -3 b) -1 c) 0 d) 1 e) 3

Função composta

323. (PUC-RJ) Seja $f(x) = \dfrac{x+1}{-x+1}$.
a) Calcule f(2).
b) Para quais valores reais de *x* temos $f(f(x)) = x$?
c) Para quais valores reais de *x* temos $f(f(f(f(x)))) = 2011$?

324. (PUC-MG) Considere as funções $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{f[f(x)]}$, definidas para $x \neq -1$. Assim, o valor de g(0,5) é:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

325. (UF-CE) Sobre a função f: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, é correto afirmar que:
a) *f* é estritamente crescente.
b) *f* é estritamente decrescente.
c) O gráfico de *f* é uma parábola.
d) $f \cdot f = f$.
e) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in [0, +\infty)$.

326. (Fatec-SP) Sejam *f* e *g* funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $g(x) = f(2x + 3) + 5$, para todo x real. Sabendo que o número 1 é um zero da função *f*, conclui-se que o gráfico da função *g* passa necessariamente pelo ponto
a) (−2; 3) b) (−1; 5) c) (1; 5) d) (2; 7) e) (5; 3)

327. (FEI-SP) Dadas as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = mx + 3$ (com *m* constante real) e $g(x) = 4x - 1$, se $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, então os gráficos de *f* e de *g* se interceptam no ponto de abscissa:
a) $x = 2$ b) $x = -3$ c) $x = \dfrac{3}{8}$ d) $x = \dfrac{1}{4}$ e) $x = \dfrac{1}{3}$

328. (UF-GO) Considere as funções $f(x) = mx + 3$ e $g(x) = x^2 - 2x + 2$, onde $m \in \mathbb{R}$. Determine condições sobre *m* para que a equação $f(g(x)) = 0$ tenha raiz real.

329. (UF-AM) Considere as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 3x + 5$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = ax + b$. Então o conjunto A dos pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f \circ g = g \circ f$ é:
a) $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2b = 5(a - 1)\}$
b) $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2b = 5(a + 1)\}$
c) $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a = 5(b - 1)\}$
d) $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a = 5(b + 1)\}$
e) $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 5a = 2(b + 1)\}$

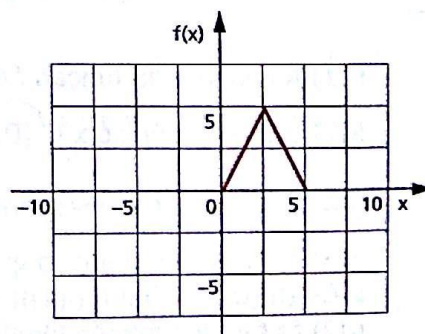
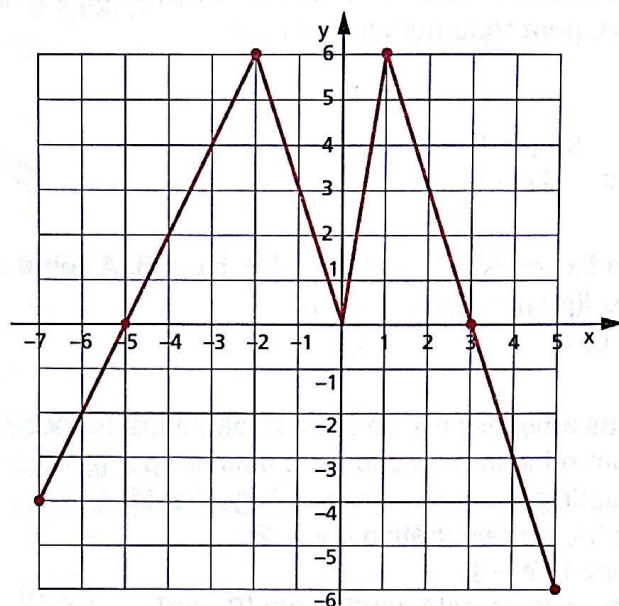
330. (UE-CE) As funções reais de variável real *f* e *g* são definidas pelas expressões $f(x) = px + q$ e $g(x) = mx + n$. A relação entre os coeficientes *p*, *q*, *m* e *n* que garantem a igualdade $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, para todo número real *x*, é:
a) $pn + qm = 0$
b) $pn - qm = 0$
c) $(p - 1)n + (1 - m)q = 0$
d) $p(n - 1) + m(q - 1) = 0$

331. (Fuvest-SP) Sejam $f(x) = 2x - 9$ e $g(x) = x^2 + 5x + 3$. A soma dos valores absolutos das raízes da equação $f(g(x)) = g(x)$ é igual a:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

332. (Fatec-SP) Sejam as funções *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^2 - 1$. Com relação à função $g \circ f$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, é verdade que
a) A soma dos quadrados de suas raízes é igual a 16.
b) O eixo de simetria de seu gráfico é $y = 2$.
c) O seu valor mínimo é -1.
d) O seu conjunto imagem está contido em $[0, +\infty[$.
e) $(g \circ f)(x) < 0$ se, e somente se, $0 < x < 3$.

333. (Fuvest-SP) Seja $f(x) = |x| - 1, \forall x \in \mathbb{R}$, e considere também a função composta $g(x) = f(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
a) Esboce o gráfico da função *f*, [...] indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
b) Esboce o gráfico da função *g*, [...] indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
c) Determine os valores de *x* para os quais $g(x) = 5$.

334. (ITA-SP) Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que *f* é par e *g* é ímpar. Das seguintes afirmações:
I. $f \cdot g$ é ímpar,
II. $f \circ g$ é par,
III. $g \circ f$ é ímpar,
é (são) verdadeira(s)
a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) Todas.

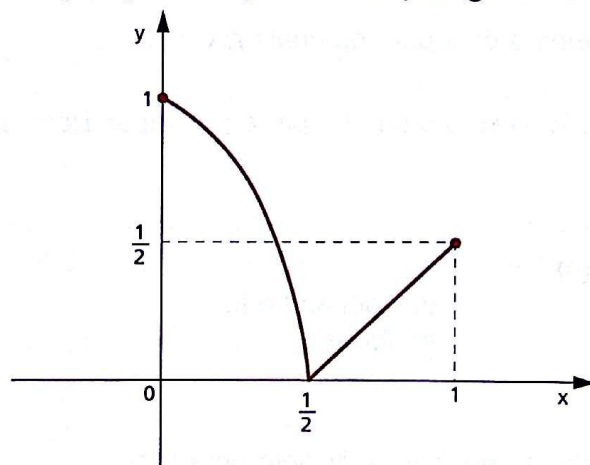
335. (Unicamp-SP) Suponha que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar (isto é, $f(-x) = -f(x)$) e periódica, com período 10 (isto é, $f(x) = f(x + 10)$). O gráfico da função no intervalo $[0, 5]$ é apresentado ao lado.
a) Complete o gráfico, mostrando a função no intervalo $[-10, 10]$, e calcule o valor de $f(99)$.
b) Dadas as funções $g(y) = y^2 - 4y$ e $h(x) = g(f(x))$, calcule $h(3)$ e determine a expressão de $h(x)$ para $2,5 \leqslant x \leqslant 5$.

336. (FGV-SP) A figura indica o gráfico da função *f*, de domínio $[-7, 5]$, no plano cartesiano ortogonal.

O número de soluções da equação $f(f(x)) = 6$ é:

a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

337. (UF-PR) Considere as funções reais $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ e $g(x) = (x^2 - x + 6)(2x - x^2)$:

a) Calcule $(f \circ g)(0)$ e $(g \circ f)(1)$.

b) Encontre o domínio da função $(f \circ g)(x)$.

338. (UF-BA) Sobre a função $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, representada pelo gráfico abaixo, é correto afirmar:

(01) A imagem da função *f* é o intervalo $[0, 1]$.

(02) Existe um único $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}$.

(04) A função *f* é decrescente em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e crescente em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(08) A imagem da função $g: [-1, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(-x)$ é o intervalo $[0, 1]$.

(16) $f(f(f(0))) = 0$ e $f(f(f(1))) = 1$.

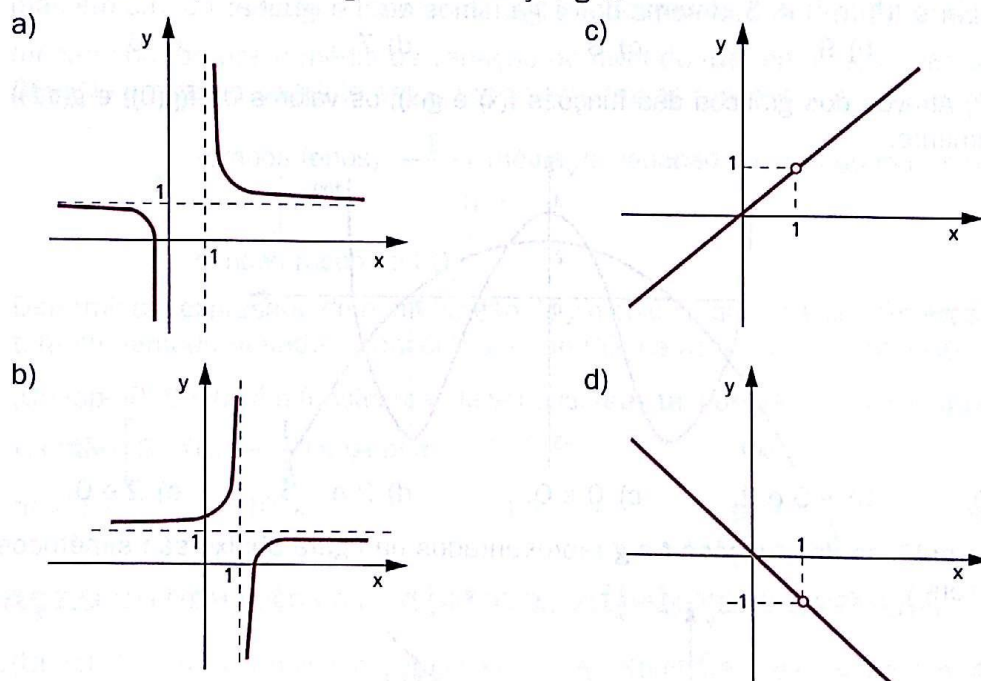
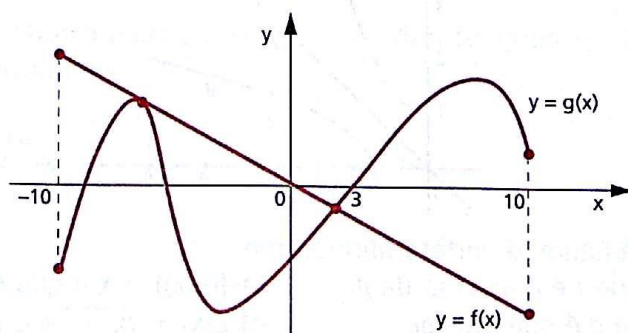
(32) $f \circ f \circ f$ é a função identidade.

339. (UF-PR) Considere as afirmativas abaixo a respeito das funções $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, com $x \in \mathbb{R}$:

1. A função $f(x) + g(x)$ tem exatamente três zeros.
2. A função $f(x) + g(x)$ é crescente no intervalo fechado $[2, 5]$.
3. A função $g(x) - f(x)$ é positiva no intervalo aberto $(0, 3)$.
4. Quando $x = 0$ tem-se $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Assinale a alternativa correta:

a) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.

340. (UE-CE) Seja $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ e seja $g(x) = f(f(x))$. A figura que melhor representa o gráfico da função *g* é:

a)
c)
b)
d)
341. (UF-PR) Abaixo estão representados os gráficos das funções *f* e *g*.

Sobre esses gráficos, considere as seguintes afirmativas:

1. A equação $f(x) \cdot g(x) = 0$ possui quatro soluções no intervalo fechado $[-10, 10]$.
2. A função $y = f(x) \cdot g(x)$ assume apenas valores positivos no intervalo aberto $(0, 3)$.
3. $f(g(0)) = g(f(0))$.
4. No intervalo fechado $[3, 10]$, a função f é decrescente e a função g é crescente.

Assinale a alternativa correta.

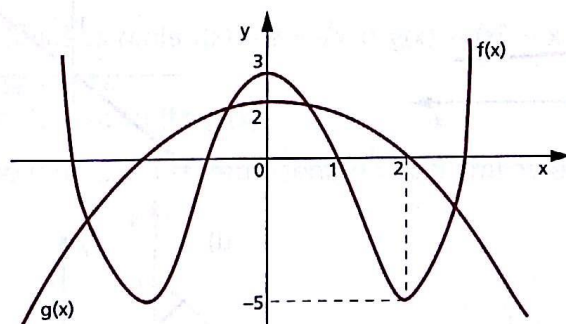
a) Somente as afirmativas 1, 3 e 4 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.

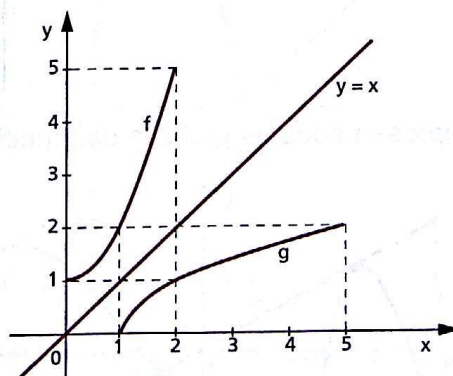
342. (U.F. São Carlos-SP) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ \dfrac{x}{2}, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$$

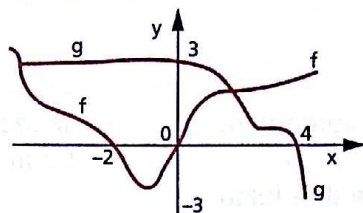
Se n é ímpar e $f(f(f(n))) = 5$, a soma dos algarismos de n é igual a:

a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

343. (Unesp-SP) Através dos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, os valores de $f(g(0))$ e $g(f(1))$ são, respectivamente:

a) -5 e 0. b) -5 e 2. c) 0 e 0. d) 2 e -5. e) 2 e 0.

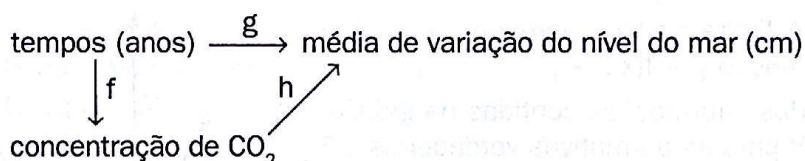
344. (UF-RN) Os gráficos das funções f e g representados na figura abaixo são simétricos em relação à reta $y = x$.

De acordo com a figura, é correto afirmar que

a) $g(f(x)) < x$ e que f é a inversa da g.
b) $f(x) = 2^x$ e que g é sua inversa.
c) $f(g(x)) > x$ e que f é a inversa da g.
d) $g(x) = \sqrt{x-1}$ e que f é sua inversa.

345. (Unesp-SP) Sejam duas funções reais e contínuas f(x) e g(x) dadas pela figura. Obtenha o resultado da expressão $f \circ g(4) + g \circ f(-1)$.

346. (Fuvest-SP) A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem como gráfico uma parábola e satisfaz $f(x + 1) - f(x) = 6x - 2$, para todo número real *x*. Então, o menor valor de f(x) ocorre quando *x* é igual a

a) $\frac{11}{6}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{5}{6}$ d) 0 e) $-\frac{5}{6}$

347. (Unesp-SP) Seja *x* o número de anos decorridos a partir de 1960 (x = 0). A função $y = f(x) = x + 320$ fornece, aproximadamente, a média de concentração de CO_2 na atmosfera em ppm (partes por milhão) em função de *x*. A média de variação do nível do mar, em cm, em função de *x*, é dada aproximadamente pela função $g(x) = \frac{1}{5}x$. Seja *h* a função que fornece a média de variação do nível do mar em função da concentração de CO_2. No diagrama seguinte estão representadas as funções *f*, *g* e *h*.

tempos (anos) $\xrightarrow{g}$ média de variação do nível do mar (cm)
$\downarrow$ f   h $\nearrow$
concentração de CO_2

Determine a expressão de *h* em função de *y* e calcule quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm.

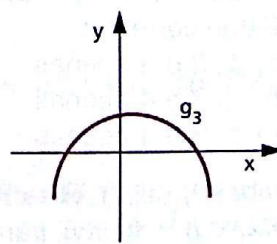
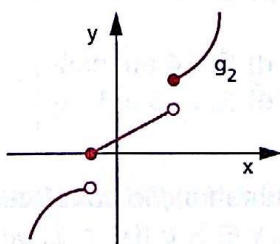
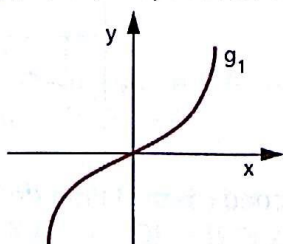
348. (Unesp-SP) Se f(x) é a função real de variável real, tal que $f(9x - 4) = x$, qualquer que seja *x*, então $\left[3 \cdot f(x) - \frac{1}{3}\right]$ é igual a

a) x + 4 b) x + 3 c) x + 1 d) $x + \frac{1}{3}$ e) $\frac{x}{3} + 1$

Função sobrejetora, injetora, bijetora e inversa

349. (UF-MT) Sejam X e Y dois conjuntos com, respectivamente, 5 e 6 elementos. A quantidade de funções injetoras com domínio igual ao conjunto X e contradomínio igual ao conjunto Y é:

a) 720 b) 120 c) 360 d) 150 e) 250

350. (UF-MA) As figuras abaixo ilustram os gráficos das funções g_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g_3: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respectivamente

A partir dos gráficos anteriores, são feitas as seguintes afirmações:

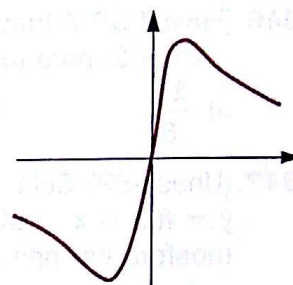
I. g_1 é sobrejetora.
II. g_2 é crescente.
III. g_3 é bijetora.

Então:

a) II e III são falsas e I é verdadeira.
b) Todas são falsas.
c) I e II são verdadeiras e III é falsa.
d) Todas são verdadeiras.
e) I e III são verdadeiras e II é falsa.

351. (UF-PE) Analise as afirmações a seguir, considerando a função f, tendo como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, dada por $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

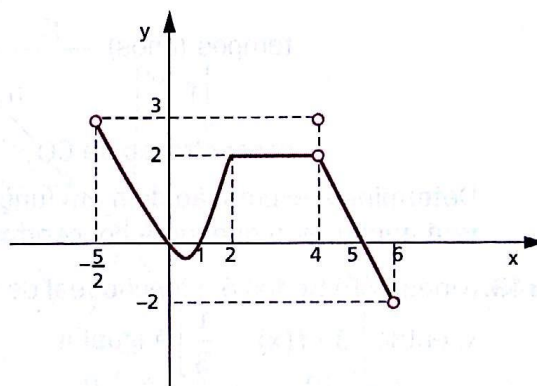
Parte do gráfico de f está esboçada ao lado.

0-0) f é uma função par.
1-1) A única raiz de $f(x) = 0$ é $x = 0$.
2-2) $|f(x)| \leq 1$, para todo x real.
3-3) Dado um real y, com $|y| < 1$ e $y \neq 0$, existem dois valores reais x tais que $f(x) = y$.
4-4) f é uma função sobrejetiva.

352. (UF-MT) A figura ao lado apresenta o gráfico de uma função $y = f(x)$.

A partir das informações contidas no gráfico, marque V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas.

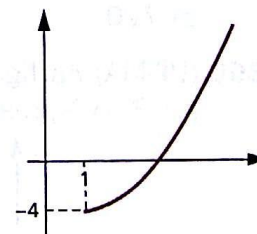
( ) $f(x)$ é uma função injetora.
( ) O domínio de $f(x)$ é o intervalo $]-2, 3]$.
( ) $f(x) = 2$, para todo $2 \leq x \leq 4$.
( ) $f(x) \geq 0$, para $\forall\, x \in \left[-\dfrac{5}{2}, 0\right] \cup [1, 5]$.

Assinale a sequência correta.

a) F, V, V, F
b) V, F, V, V
c) V, V, V, F
d) F, F, F, V
e) F, V, F, F

353. (UF-PE) Sobre a função dada por $f(x) = x^2 - 2x - 3$, com domínio o conjunto $\{x: x \text{ é real e } x \geq 1\}$ e contradomínio o conjunto $\{y: y \text{ é real e } y \geq -4\}$, com parte de seu gráfico esboçado, analise as afirmações a seguir:

1. f é injetora.
2. f é sobrejetora.
3. f é invertível.
4. $f(x + 1) = (x + 2)(x - 2)$, para todo x real e $x \geq 0$.

Estão corretas:

a) 1, 2 e 3 apenas
b) 2, 3 e 4 apenas
c) 1, 3 e 4 apenas
d) 2 e 4 apenas
e) 1, 2, 3 e 4

354. (ITA-SP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ uma função satisfazendo às condições:
$f(x + y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(x) \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.
II. $f(0) = 1$
III. f é injetiva.
IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

É (são) falsa(s) apenas

a) I e III. b) II e III. c) I e IV. d) IV. e) I.

355. (UE-CE) Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$. Se $h = f \circ g$ é a função composta e h^{-1} sua inversa, então $h^{-1}(x)$ é igual a

a) $x + 2$ b) x c) $x - 2$ d) $2x$

356. (UF-PA) O custo c de produção de uma peça em função do número n de produtos é dado pela fórmula

$$c(n) = \frac{1}{1 + n^2}$$

A função inversa desta fórmula é

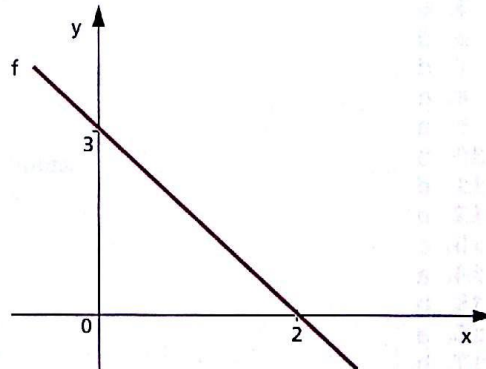
a) $n = \frac{1}{(1 + c^2)}$ b) $n = \frac{1}{(1 - c^2)}$ c) $n = \sqrt{\frac{(1 - c)}{c}}$ d) $n = \sqrt{\frac{(1 + c)}{c}}$ e) $n = \sqrt{\frac{(1 + c^2)}{c}}$

357. (Fatec-SP) Parte do gráfico de uma função real f, do 1º grau, está representada na figura ao lado.

Sendo g a função real definida por $g(x) = x^3 + x$, o valor de $f^{-1}(g(1))$ é

a) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{3}$

358. (ITA-SP) Seja $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$.

a) Mostre que f é injetora.
b) Determine $D = \{f(x); x \in \mathbb{R} - \{-1\}\}$ e $f^{-1}: D \to \mathbb{R} - \{-1\}$.

359. (UF-BA) Determine $f^{-1}(x)$, função inversa de $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, sabendo que $f(2x - 1) = \frac{x}{3x - 6}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

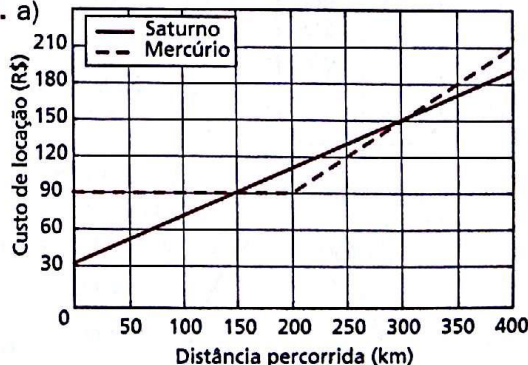
360. (ITA-SP) Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

361. (ITA-SP) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é ímpar.

Respostas das questões de vestibulares

1. Opção V – Os três estão errados.
2. d
3. c
4. a
5. e
6. d
7. d
8. c
9. a
10. b
11. d
12. d
13. c
14. a
15. b
16. a
17. b
18. e
19. 70
20. c
21. d
22. d
23. a
24. a
25. c
26. b
27. b
28. b
29. F, V, V, V e F.
30. b
31. c
32. b
33. c
34. 22 alunos.
35. a) 20 e 150
    b) 400 e 10%
36. d
37. c
38. d
39. Não existem conjuntos A e B satisfazendo as condições dadas.
40. a
41. a
42. c
43. c
44. e
45. c
46. a
47. c
48. 01 + 02 + 08 + 16 = 27
49. b
50. c
51. 02 + 08 = 10
52. e
53. d
54. c
55. c
56. e
57. d
58. e
59. F, V, V e V.
60. d
61. b
62. 01 + 02 = 03
63. c

65. b
66. O primeiro estudante.
67. a) Verificação
    b) Demonstração

68. a) $m = 5$, $n = 3$, $p = -1$ e $q = -6$.
b) $m = 40$, $n = 24$, $p = -8$ e $q = -48$.
69. d
70. a
71. b
72. a
73. a
74. b
75. d
76. e
77. $X = 3$ e $Y = 5$.
78. e
79. a) 1, 2, 3 e 4.
b) 30
80. a
81. e
82. c
83. e
84. c
85. Demonstração
86. F, F, V, V e F.
87. a) $v = 346$ m/s
b) $t = 16$ °C
88. c
89. d
90. a **91.** a **92.** b **93.** b **94.** d
95. e
96. a
97. d
98. a
99. d
100. e **101.** a **102.** d **103.** c
104. a **105.** d **106.** a **107.** c
108. a **109.** a **110.** d **111.** d
112. c **113.** e **114.** e **115.** e
116. a) Final do ano 2032.
b) −1,83%
117. $a = 100$, $b = 1$ e $c = 10$.
$$f(x) = \frac{100x + 200}{x + 10}$$
118. a) 0,25
b) $f(x) = \dfrac{25 - x}{100 - x}$
119. a
120. c
121. a) 642 milhões
b) 584 milhões
122. e
123. c
124. 20,8 bilhões de dólares.
125. a **126.** e
127. a) $X = 100N + I$
b) $N = 8$ e $I = 19$
128. I) 10 litros.
II) 25 litros.
III) $\dfrac{250}{11}$ litros.
129. c
130. 01 + 02 + 16 = 19
131. c **132.** a **133.** d **134.** e
135. e **136.** d **137.** d **138.** d
139. c **140.** c **141.** c **142.** c
143. a) 137 domicílios. c) 31%
b) 834 pessoas.
144. b
145. e
146. c
147. b
148. V, V, V, F e V.
149. a
150. e
151. a
152. c
153. a
154. c
155. c
156. 200 chamadas.
157. 70
158. d
159. b
160. c
161. d
162. 5 horas.
163. 4 s
164. d
165. c
166. a
167. b
168. a
169. a) $y = 0{,}03x + 0{,}7$
b) $y = 1{,}66$ m
170. 2029
171. a)

b) Menos de 150 km e mais de 300 km por dia. O custo deverá ser de R$ 0,30.

172. a) 91º
b) $0,9x + 2$

173. a) salário mínimo → $f(x) = 42x + 300$
cesta básica → $f(x) = 6x + 154$
b) 2012

174. a) $x = \frac{3n-2}{200}$, com 3n – d múltiplo positivo de 200 e $y = \frac{d-2n}{200}$ com d – 2n múltiplo positivo de 200.
b) 30 do tipo A e 10 do tipo B.
c) Sim, se a empresa utilizar 20 do tipo A e 10 do tipo B.

175. b

176. Demonstração

177. c

178. I) $x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2}$ anos
II) $\frac{11-\sqrt{73}}{2} < x < \frac{11+\sqrt{73}}{2}$
III) 85%

179. a

180. c

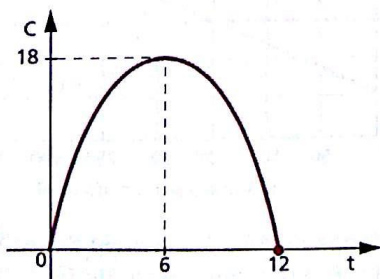
181. b

182. a) $x < -\frac{5}{2}$ ou $x > 0$
b) $p \leq -3$

183. a)

x	C
10	100
16	160
18	180

b)

t	Q
2	10
4	16
6	18

184. a

185. a) duas
b) $m \leq 4$ ou $m \geq 16$

186. a

187. c

188. d

189. e

190. b

191. d

192. a) $y = x^2 + 1$
b) Não, $y = 2x + 1$.

193. b

194. c

195. e

196. d

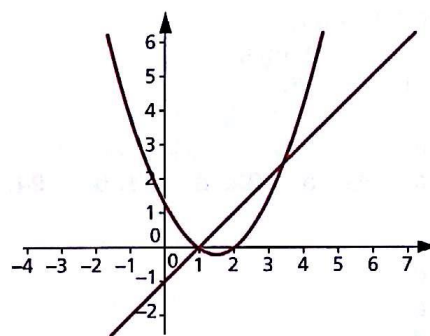
197. d

198. e

199. c

200. b

201. 15

202. a)

b) (1, 0) e $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

203. d **204.** d **205.** b **206.** b
207. d **208.** a **209.** b **210.** d
211. d **212.** c **213.** c

214. c

215. d

216. 25

217. 48

218. e

219. 01 + 02 + 64 = 67

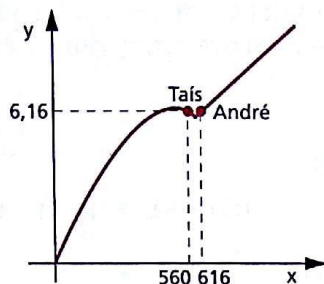
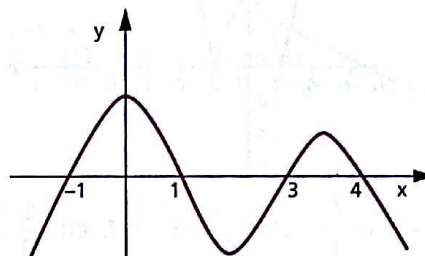
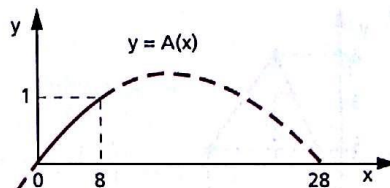
220. a) $\left(-\frac{m}{2}; \frac{8-m^2}{4}\right)$
b) $m \leq -2$ ou $m \geq 2$
c) $m = 2$
d) $x = \sqrt{y-1} - 1$

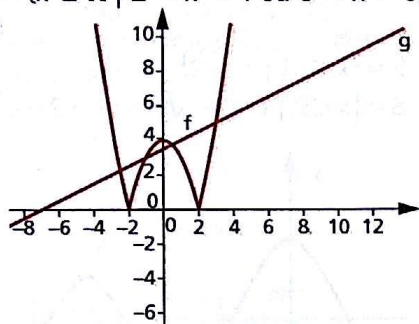
221. b

222. e

223. 01 + 04 + 08 + 16 + 32 = 61

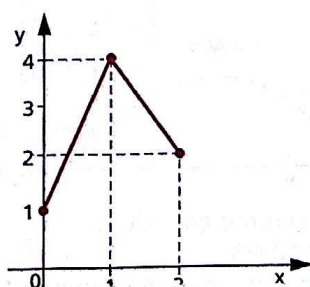
224. d

225. a) 400 g — R\$ 6,00 e 750 g — R\$ 7,50
b) Taís — 560 gramas e André — 616 gramas
c)

226. a
227. a) $k = 25$
b) $k = 2,5$
228. a
229. d
230. altura = 20 m; alcance = $30\sqrt{3}$ m
231. a
232. 18 metros.
233. b
234. b
235. b
236. a) R\$ 800,00
b) R\$ 5,50
237. a
238. e
239. b
240. a) R\$ 18,00
b) $f(x) = (100 - 5x)(15 + x)$
c) R\$ 17,50
241. b
242. a) 360 000 cupons e a probabilidade é 30%.
b) 230
243. b
244. 27
245. d
246. d
247. e
248. d
249. $h_1 = \frac{r}{9}$
250. a
251. $10 < x < 20$
252. d
253. b
254. d
255. b
256. c
257. b
258. b
259. $3 < x < 4$
260. c
261. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5 \text{ ou } x > 6\}$
262. b
263. $A =]-\infty; -1[\cup \left]-1; -\frac{2}{3}\right] \cup]2; +\infty[$
264. c
265. $\Delta = 12$
266. (a) $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$
(b) $x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$
267. a) $S = \mathbb{R}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{3}\}$
268. a)

b) $(ab) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$; $\{0, 1, 3 \text{ e } 4\}$
269. a) 75,6 kg
b) $c(v) = \frac{1}{2}v^2 - 40v + 1000$
270. a) $a = -0,1$; $b = 1$ e $c = 1,1$
b) 11 m
271. 02 + 04 + 08 = 14
272. a) $\cong 3,7\%$
b) 40%
c)

273. a) A crise ocorreu em 2008.
b) R\$ 45 710,00
c) 7,3% ao ano, aproximadamente.
274. c
275. a) R\$ 4 160,00
b) R\$ 4 340,00
c) $x = \underbrace{1,32}_{\text{Preço do litro de leite}} \times 3300 = \underbrace{4356,00}_{\text{Maior valor arrecadado}}$
276. d
277. a
278. $\frac{4}{5}c$

279. c
280. b
281. d
282. c
283. b
284. a
285. c
286. $x = -1$ ou $x = 3$
287. a
288. a
289. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4 \text{ ou } 6 \leqslant x \leqslant 9\}$
290. a)

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

291. b
292. c
293. 1. $\begin{cases} 30x - 10\,000 & \text{se } 500 \leqslant x \leqslant 1000 \\ -0{,}01x^2 + 40x - 10\,000 & \text{se } 1000 < x < 3000 \end{cases}$

2. R$ 80,00
3. 2600 unidades.

294. d.
295. R$ 5,00
296. d
297. a
298. a)

b) 5,5 u.a.

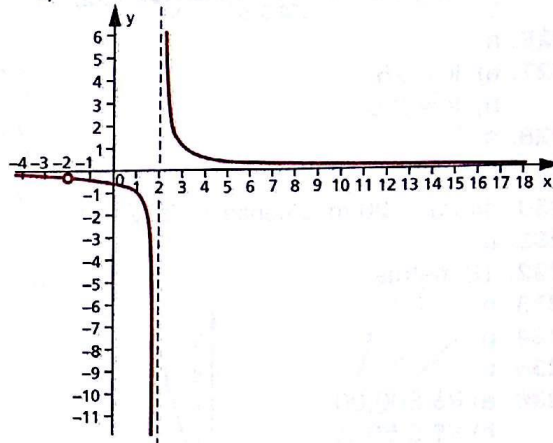
c) $f(4) = \frac{29}{3}$

299. b
300. b
301. d
302. c
303. e
304. a
305. c
306. e **307.** c **308.** c **309.** b

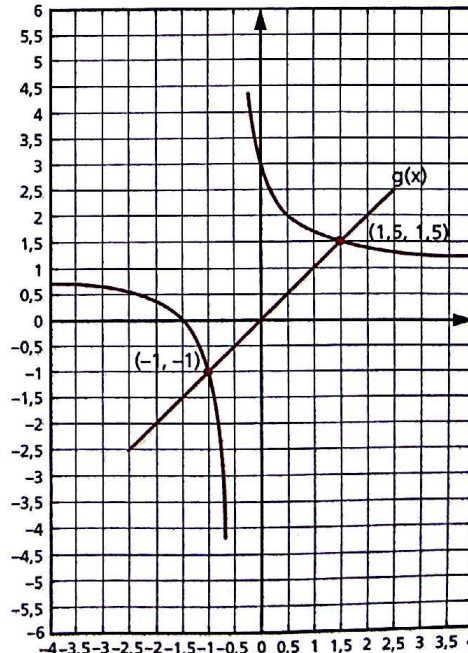
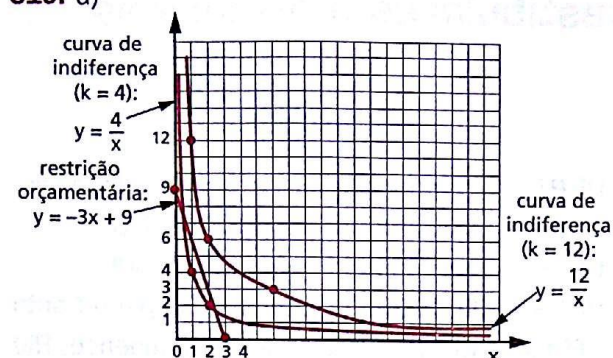
310. a) funções pares: I e III
funções ímpares: IV e V
b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ é par
g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \text{sen } x$ é ímpar

311. c
312. e
313. a) $\frac{1}{(x-2)}$

b) $f(0) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = -1$; $f(3) = 1$; $f(4) = \frac{1}{2}$

c)

314. a) 30
b) 4 horas e 45 minutos (ou 4,75 horas).
c) a = 10, b = 600 e c = 15.

315. d
316. b
317. e
318. a) -1 e $\frac{3}{2}$

b)

319. a)

b) $k = \dfrac{27}{4}$ e $P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

320. V, V, F, V e F.

321. a) 1: 425 000

b) 34,25

c) 6,8

322. d

323. a) $f(2) = -3$

b) $S = \varnothing$

c) $f(f(f(f(2\,011)))) = 2\,011$

324. a

325. a

326. b

327. e

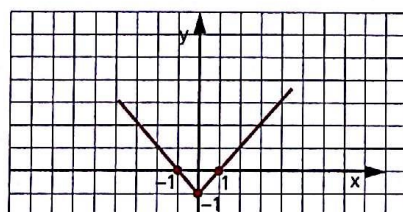
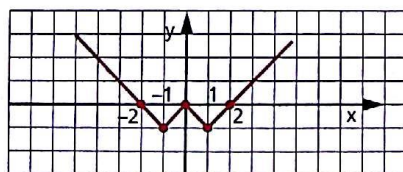
328. $-3 \leqslant m < 0$

329. a

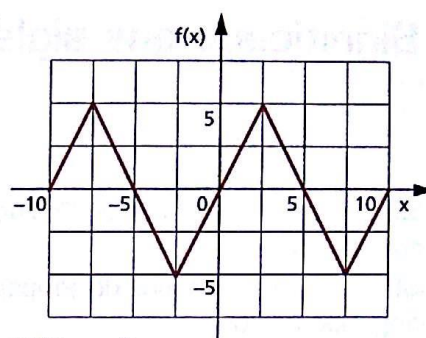
330. c

331. d

332. c

333. a)

b)

c) V = {−7, 7}

334. d

335. a)

$f(99) = -2$

b) $h(3) = 0$

$h(x) = 4x^2 - 32x + 60$

336. d

337. a) $(f \circ g)(0) = 2$

$(g \circ f)(1) = -36$

b) [0, 2]

338. 01 + 04 + 08 + 16 = 29

339. c

340. c

341. c

342. a

343. b

344. d

345. 3

346. c

347. $h = \dfrac{y - 320}{5}$; 16 cm

348. e

349. a

350. c

351. F, V, V, V e F.

352. d

353. e

354. e

355. a

356. c

357. d

358. a) Demonstração

b) $D = \mathbb{R} - \{2\}$

359. $f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

tal que $f^{-1}(x) = \dfrac{9x + 1}{3x - 1}$.

360. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 3}, \text{ com } x \geqslant 3 \\ -\sqrt{3 - x}, \text{ com } x < 3 \end{cases}$

361. Demonstração

Significado das siglas de vestibulares e olimpíadas

Enem-MEC — Exame Nacional do Ensino Médio, Ministério da Educação

ESPM-SP — Escola Superior de Propaganda e Marketing, São Paulo

Fatec-SP — Faculdade de Tecnologia de São Paulo

FEI-SP — Faculdade de Engenharia Industrial, São Paulo

FFCL Belo Horizonte-MG — Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte, Minas Gerais

FGV-RJ — Fundação Getúlio Vargas, Rio de Janeiro

FGV-SP — Fundação Getúlio Vargas, São Paulo

Fuvest-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade de São Paulo

ITA-SP — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo

Mackenzie-SP — Universidade Mackenzie de São Paulo

Obmep — Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-PR — Pontifícia Universidade Católica do Paraná

PUC-RJ — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

PUC-RS — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Udesc-SC — Universidade do Estado de Santa Catarina

UE-CE — Universidade Estadual do Ceará

U.E. Londrina-PR — Universidade Estadual de Londrina, Paraná

UE-RJ — Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UF-BA — Universidade Federal da Bahia

UF-CE — Universidade Federal do Ceará

UF-ES — Universidade Federal do Espírito Santo

UFF-RJ — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro

UF-GO — Universidade Federal de Goiás

U.F. Juiz de Fora-MG — Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais

U.F. Lavras-MG — Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais

UF-MA — Universidade Federal do Maranhão

UF-MG — Universidade Federal de Minas Gerais

UF-MS — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UF-MT — Universidade Federal do Mato Grosso

UF-PA — Universidade Federal do Pará

UF-PE — Universidade Federal de Pernambuco

UF-PI — Universidade Federal do Piauí

UF-PR — Universidade Federal do Paraná

UF-RJ — Universidade Federal do Rio de Janeiro

UF-RN — Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UF-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul

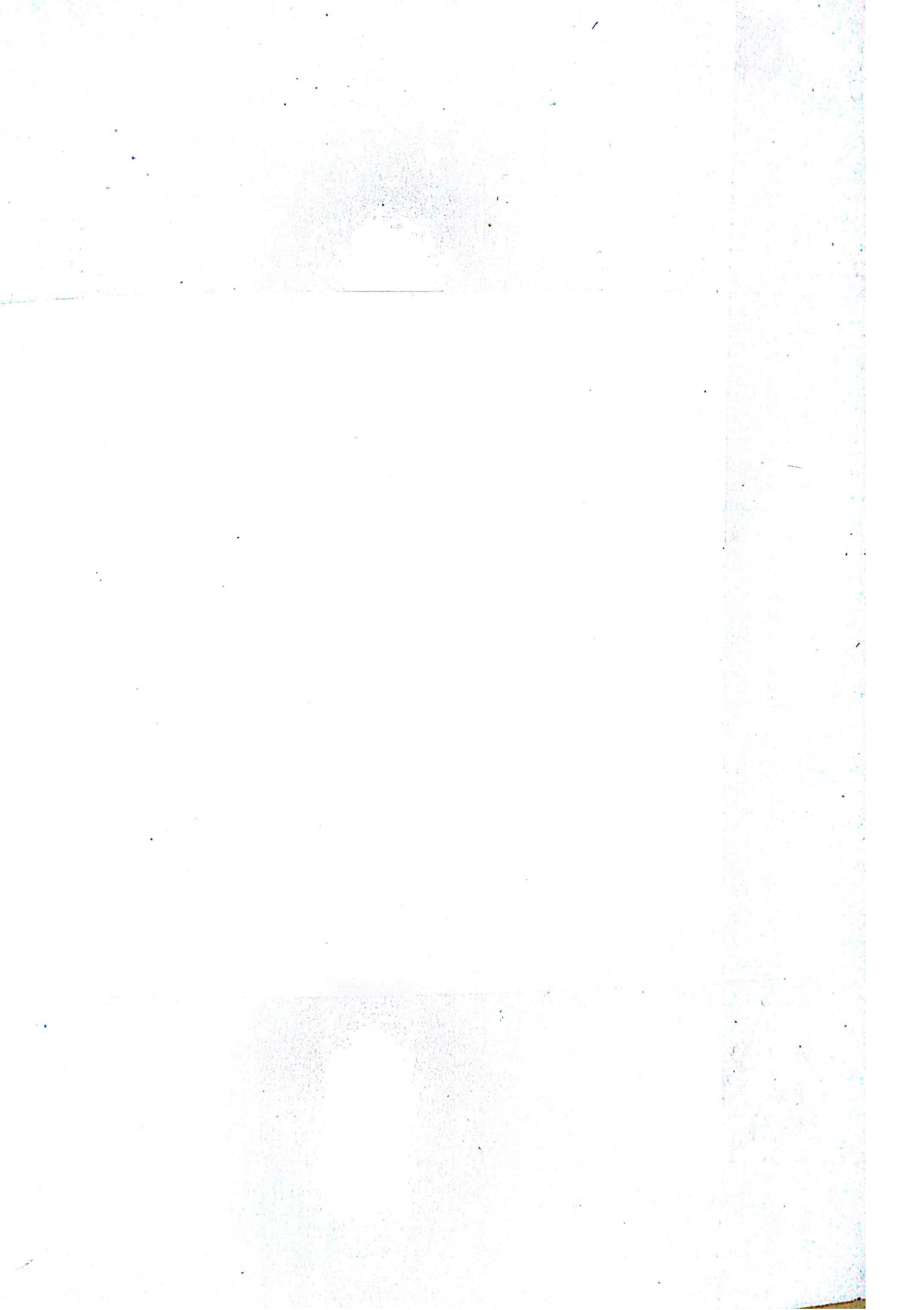
UF-SC — Universidade Federal de Santa Catarina

U.F. São Carlos-SP — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo

U.F. Uberlândia-MG — Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais

Unesp-SP — Universidade Estadual Paulista, São Paulo

Unicamp-SP — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo

Unifesp-SP — Universidade Federal de São Paulo

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

VOLUME 1	conjuntos, funções
VOLUME 2	logaritmos
VOLUME 3	trigonometria
VOLUME 4	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
VOLUME 5	combinatória, probabilidade
VOLUME 6	complexos, polinômios, equações
VOLUME 7	geometria analítica
VOLUME 8	limites, derivadas, noções de integral
VOLUME 9	geometria plana
VOLUME 10	geometria espacial
VOLUME 11	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

ISBN 978-85-357-1681-8
9 788535 716818